SOLUZIONI DI UNA TRACCIA DELLA PROVA DI CALCOLO 2 DEL 02/02/09 – ING. INF.
(Le prove relative alle altre tracce si risolvono in modo analogo).

1. Risolvere nel campo complesso l'equazione $\left(\dfrac{z}{i+\sqrt{2}}\right)^2 = -4i$.

L'equazione può essere riscritta nel seguente modo $z = 2\left(i+\sqrt{2}\right)\sqrt{-i}$. *Si ha*

$$\sqrt{-i} = \cos\left(-\frac{\pi}{4}+k\pi\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}+k\pi\right) \quad k=0,1.$$

Quindi si hanno le due soluzioni

$$z_0 = 2\left(i+\sqrt{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\left(\sqrt{2}+2\right)+i\left(\sqrt{2}-2\right)$$

$$z_1 = 2\left(i+\sqrt{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\left(\sqrt{2}+2\right)-i\left(\sqrt{2}-2\right).$$

2. Determinare, al variare del parametro reale *k*, l'integrale generale dell'equazione differenziale $y''+2y'+(1-k)y = x-1$.

La soluzione generale assume la forma $y = y_o + y_p$ *dove* y_o *è la soluzione generale dell'equazione omogenea associata e* y_p *è una soluzione particolare della non omogenea. L'equazione algebrica associata all'omogenea è* $\alpha^2+2\alpha+(1-k)=0$ *le cui* si *soluzioni sono date da* $-1\pm\sqrt{k}$. *Quindi occorre distinguere tre casi*:

$$1° \text{ caso } (k>0),\quad y_o = c_1 e^{\left(-1+\sqrt{k}\right)x}+c_2 e^{\left(-1-\sqrt{k}\right)x} \quad c_1,c_2\in\mathbb{R};$$

$$2° \text{ caso } (k=0),\quad y_o = e^{-x}\left(c_1+c_2x\right) \quad c_1,c_2\in\mathbb{R};$$

$$3° \text{ caso } (k<0),\quad y_o = e^{-x}\left(c_1\cos\left(\sqrt{-k}x\right)+c_2\sin\left(\sqrt{-k}x\right)\right) \quad c_1,c_2\in\mathbb{C}.$$

Per determinare y_p *occorre distinguere due casi*:

$$1° \text{ caso } (k\neq 1),\quad y_p = Ax+B;$$

$$2° \text{ caso } (k=1),\quad y_p = Ax^2+Bx+C.$$

Applicando il principio di identità dei polinomi si ottiene $y_p = \dfrac{x}{1-k}-\dfrac{3+k}{(1-k)^2}$ *nel 1° caso,* $y_p = \dfrac{x^2}{4}-\dfrac{3x}{4}$ *nel 2° caso.*

3. Siano $\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|$ e $\sum_{k=0}^{\infty}|b_k|$ convergenti. Dimostrare che $\sum_{k=0}^{\infty}|a_kb_k|$ converge.

Siano $\{A_n\}$, $\{B_n\}$ *e* $\{C_n\}$ *le successioni delle somme parziali delle serie* $\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|$, $\sum_{k=0}^{\infty}|b_k|$ *e* $\sum_{k=0}^{\infty}|a_k\cdot b_k|$ *rispettivamente. Poiché le serie sono a termini positivi, si ottiene*

$$C_n = \sum_{k=0}^{n}|a_k\cdot b_k| \le \sum_{k=0}^{n}|a_k|\cdot\sum_{k=0}^{n}|b_k| = A_nB_n.$$

Dal teorema del confronto per le successioni numeriche e dalla convergenza delle successioni $\{A_n\}$ *e* $\{B_n\}$ *segue che la successione* $\{C_n\}$ *non può divergere. Inoltre* $\{C_n\}$, *essendo monotona crescente, è una successione regolare, di conseguenza deve necessariamente convergere.*

4. Calcolare $\int_0^1 \pi^x dx$ utilizzando la definizione di integrale definito. (Sugg: $\sum_{i=1}^{n} \pi^{\frac{i}{n}} = \frac{1-\pi^{1+\frac{1}{n}}}{1-\pi^{\frac{1}{n}}}$**)**.

Si ha

$$\int_0^1 \pi^x dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \pi^{\frac{i}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1-\pi^{1+\frac{1}{n}}}{1-\pi^{\frac{1}{n}}} = (1-\pi) \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1-\pi^{\frac{1}{n}}} \right).$$

Ponendo $m = \frac{1}{n}$ *e applicando la regola di De l'Hospital si ottiene*

$$\int_0^1 \pi^x dx = (1-\pi) \lim_{m\to 0^+}\left(\frac{m}{1-\pi^m} \right) = (1-\pi) \lim_{m\to 0^+}\left(\frac{1}{-\pi^m \log \pi} \right) = \frac{\pi - 1}{\log \pi}.$$