1. Studiare l'insieme di derivabilità della funzione $f(x)=\log\sqrt{|x^2+7x|+1}$. Stabilire la natura degli eventuali punti di non derivabilità (punti angolosi, punti di cuspide, punti di flesso a tangente verticale).

f è definita e continua in **R** e si ha $f(x)=\begin{cases}\log\sqrt{x^2+7x+1} & x\le -7 \quad x\ge 0\\ \log\sqrt{-x^2-7x+1} & -7<x<0\end{cases}$. Quindi

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{2x+7}{2\left(x^2+7x+1\right)} & x<-7 \quad x>0\\ \dfrac{-2x-7}{2\left(-x^2-7x+1\right)} & -7<x<0\end{cases}.$$

Poiché $\lim_{x\to-7^-}f'(x)=-7/2$, $\lim_{x\to-7^+}f'(x)=7/2$, $\lim_{x\to0^-}f'(x)=-7/2$, $\lim_{x\to0^+}f'(x)=7/2$, la funzione risulta derivabile in **R** – {-7 , 0}. In particolare i punti -7 e 0 sono punti angolosi.

2. Determinare l'estremo superiore e inferiore (specificando se sono anche massimo e minimo) della successione $a_n=\dfrac{n-1}{e^n}$.

Si consideri la funzione associata $f(x)=\dfrac{x-1}{e^x}$ definita per $x\ge 1$; si ha $f(1)=0$, $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$ e $f'(x)=\dfrac{2-x}{e^x}$. Il punto x = 2 è un punto di massimo assoluto per *f*. Quindi si ha $\inf a_n=\min a_n=0$ e $\sup a_n=\max a_n=e^{-1}$.

3. Sia $f(x)=\begin{cases}-x^3 & \text{se } x\ne 0\\ -1 & \text{se } x=0\end{cases}$. Calcolare $\lim_{x\to0}f(x)$ e dimostrare il risultato mediante la definizione di limite.

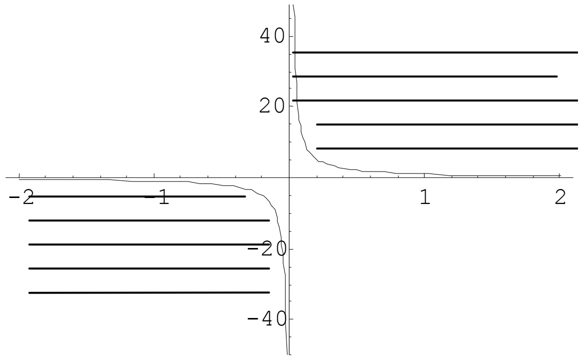
Si ha $\lim_{x\to0}f(x)=0$. Infatti preso un $\epsilon>0$ arbitrario la disequazione $-\varepsilon<-x^3<\varepsilon$, ovvero $-\varepsilon<x^3<\varepsilon$, ammette come soluzione i punti contenuti nell'intervallo $\left(\sqrt[3]{-\varepsilon},\sqrt[3]{\varepsilon}\right)$. Allora preso $\delta_\varepsilon=\sqrt[3]{\varepsilon}$ segue la relazione $\left(-\delta_\varepsilon,\delta_\varepsilon\right)-\{0\}\subset\left(\sqrt[3]{-\varepsilon},\sqrt[3]{\varepsilon}\right)$.

4. Sia *f* continua in x_0 tale che $f\left(x_0\right)<0$. Dimostrare, mediante la definizione di limite, che esiste un intorno $I_\delta\left(x_0\right)$ di x_0 tale che $f\left(x\right)<0 \ \ \forall x\in I_\delta\left(x_0\right)$.

Dalla continuità di f in x_0 segue che preso un $\epsilon>0$ arbitrario la disequazione $f(x_0)-\varepsilon<f(x)<f(x_0)+\varepsilon$ è soddisfatta in un opportuno intorno $I_{\delta_\varepsilon}\left(x_0\right)$ di x_0. Essendo $\epsilon>0$ arbitrario basta allora prenderlo $\varepsilon=-\dfrac{f(x_0)}{2}$ affinché f si mantenga negativa in $I_{\delta_\varepsilon}\left(x_0\right)$.

1. Determinare l'insieme di definizione della funzione $f(x,y)=\dfrac{\log(xy-1)}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Stabilire se si tratta di un insieme aperto, di un insieme chiuso, di un insieme connesso per archi.

Le condizioni sono $xy-1>0$ e $(x,y)\neq(0,0)$. La curva di equazione $xy-1=0$ è l'iperbole equilatera. Poiché l'origine non soddisfa la disequazione, il dominio di *f* è la regione del piano disegnata in figura (escludendo i punti dell'iperbole stessa).



Tale insieme è aperto e non connesso per archi.

2. Sia *F*(*x*) una primitiva della funzione $f(x)=\cos x^2$ su tutto **R**. Calcolare $\int \dfrac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}\,dx$, esprimendo il risultato in termini della funzione *F*. (*Sugg: porre* $x=t^4 \quad t>0$).

Sostituendo la variabile di integrazione si ottiene

$$\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}\,dx = 4\int t^2\sin\left(t^2\right)dt = -2\int t\,\frac{d\cos\left(t^2\right)}{dt}\,dt = -2t\cos\left(t^2\right)+2\int\cos\left(t^2\right)dt =$$

$$-2t\cos\left(t^2\right)+2F(t)+c = -2\sqrt[4]{x}\cos\left(\sqrt{x}\right)+2F(\sqrt[4]{x})+c\,.$$

3. Stabilire il carattere ed eventualmente calcolare la somma della serie numerica $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ dove $a_{k+1}=-\dfrac{2}{3}a_k$.

Per ogni *k* intero positivo si ha $a_k=\left(-\dfrac{2}{3}\right)^k a_0$. Quindi la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ è geometrica di ragione $-\dfrac{2}{3}$. E' dunque convergente con somma pari a $\dfrac{3}{5}a_0$.

4. Utilizzando la definizione di integrale definito calcolare $\int_1^2 x\,dx$.

Per definizione si ha $\int_1^2 x\,dx = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{k}{n}\right)\dfrac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{n(n+1)}{2n^2}\right)=\dfrac{3}{2}$.