**1.** Sia $w=\dfrac{e^{(3-i)\pi}}{2+i}$. Risolvere, nel campo complesso, l'equazione $e^{z}=\dfrac{10\,\mathrm{Im}(w)}{e^{3\pi}}i$.

Si ha $w=\dfrac{e^{3\pi}\left(\cos\pi-i\sin\pi\right)}{2+i}=-\dfrac{e^{3\pi}(2-i)}{(2+i)(2-i)}=-\dfrac{2}{5}e^{3\pi}+i\dfrac{1}{5}e^{3\pi}$ da cui segue $\mathrm{Im}\,w=\dfrac{1}{5}e^{3\pi}$.

L'equazione da risolvere è allora $e^{z}=2i$. Posto $z=x+iy$, l'equazione diventa (utilizzando la formula di Eulero) $e^{x}\left(\cos y+i\sin y\right)=2i$ che equivale al sistema $\begin{cases} e^{x}\cos y=0 \\ e^{x}\sin y=2\end{cases}$. La prima equazione è soddisfatta per ogni $x$ reale e per $y=\dfrac{\pi}{2}(2k+1),\quad \forall k\in\mathbb{Z}$. Sostituendo nella seconda equazione si ottiene $e^{x}(-1)^{k}=2$ che è soddisfatta quando $k=2h,\quad \forall h\in\mathbb{Z}$ e per $x=\ln 2$. In conclusione le soluzioni dell'equazione sono i numeri complessi $z=\ln 2+i\left(\dfrac{\pi}{2}+2h\pi\right),\quad \forall h\in\mathbb{Z}$.

**2.** Calcolare per ogni $n$ intero positivo $a_n=\displaystyle\int_0^n \frac{x-2}{(x+2)^3}\,dx$. Stabilire poi il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$

Utilizzando il metodo dei fratti semplici si ottiene $\dfrac{x-2}{(x+2)^3}=\dfrac{1}{(x+2)^2}-\dfrac{4}{(x+2)^3}$ da cui segue

$a_n=\displaystyle\int_0^n\frac{1}{(x+2)^2}\,dx-4\int_0^n\frac{1}{(x+2)^3}\,dx=-\frac{n}{(n+2)^2}$. Poiché si ha $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{(n+2)^2}\,n=1$, dal criterio del confronto asintotico si deduce che la serie $-\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+2)^2}$ diverge a $-\infty$.

**3.** Utilizzare la formula di MacLaurin per approssimare $\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)$ con un numero razionale commettendo un errore non superiore a $10^{-2}$. (Sugg.: $\dfrac{d^n}{dx^n}\ln(1+x)=(-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{(1+x)^n}$ )

Si ha $\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)=\ln\left(1+\dfrac{1}{2}\right)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{1}{2^k k}+(-1)^n\frac{1}{2^{n+1}(n+1)(c+1)^{n+1}}$, dove $c\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$. Quindi

$\left|\ln\left(1+\dfrac{1}{2}\right)-\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{1}{2^k k}\right|=\dfrac{1}{2^{n+1}(n+1)(c+1)^{n+1}}\le\dfrac{1}{2^{n+1}(n+1)}$. Per $n$ = 4 si ottiene

$\dfrac{1}{2^5 5}\simeq 6.25\times10^{-3}<10^{-2}$ da cui $\displaystyle\sum_{k=1}^{4}(-1)^{k-1}\frac{1}{2^k k}=\frac{77}{192}$ è il numero cercato.

**4.** Determinare l'equazione differenziale che ammette come integrale generale la funzione $f(x)=e^{-x}\cos 2x+c_1 e^{x}\sin 2x+c_2 e^{x}\cos 2x$, con $c_1,c_2$ costanti complesse.
Dall'espressione della funzione $f$ si deduce che l'eq. differenziale è del tipo lineare di secondo ordine non omogenea a coeff. costanti $y''-a_1y'+a_2y=b(x)$. Dalla combinazione lineare $c_1 e^{x}\sin 2x+c_2 e^{x}\cos 2x$ si ottiene che i numeri complessi coniugati $1\pm i2$ costituiscono le

soluzioni dell'equazione algebrica associata all'eq. differenziale omogenea. Quindi, poiché la suddetta equazione algebrica assume l'espressione $\left(\alpha-\left(1-i2\right)\right)\left(\alpha+\left(1-i2\right)\right)=0$, cioè $\alpha^2-2\alpha+5=0$, l'eq. differenziale omogenea associata assumerà l'espressione $y''-2y'+5y=0$. Essendo poi $y_p(x)=e^{-x}\cos 2x$ un integrale particolare dell'eq. differenziale non omogenea $y''-2y'+5y=b(x)$, si ottiene, sostituendo $y_p(x), y_p'(x), y_p''(x)$ al primo membro, l'espressione $b(x)=e^{-x}\left(8\sin 2x+4\cos 2x\right)$.