1. Studiare la derivabilità parziale in $(0,0)$, rispetto ad x ed y, della funzione $f(x,y)=\sqrt{|y^2-xy|}$.

Poiché si ha $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{0}{h}=0$ e $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\sqrt{h^2}}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{|h|}{h}$ non esiste, si conclude che la funzione è parzialmente derivabile nell'origine rispetto ad x e si ha $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$, mentre non lo è rispetto ad y.

2. Sia $f(x)=\dfrac{x+1}{\left(|x-2|+1\right)(x+2)}$ definita in $(-2,+\infty)$. Determinare la primitiva di $f(x)$ che si annulla nel punto $x_0=0$.

Si ha $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+1}{(x-1)(x+2)} & x\ge 2\\[2mm] \dfrac{x+1}{(3-x)(x+2)} & -2<x<2\end{cases}$. Quindi detta g la primitiva di f sull'intervallo $(-2,+\infty)$ che si annulla nell'origine si ha

$$g(x)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^2\frac{t+1}{(3-t)(t+2)}\,dt+\int_2^x\frac{t+1}{(t-1)(t+2)}\,dt & x\ge 2\\[2mm] \displaystyle\int_0^x\frac{t+1}{(3-t)(t+2)}\,dt & -2<x<2\end{cases}.$$

Mediante il metodo dei fratti semplici si ottiene

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{5}\log(x-1)+\dfrac{1}{3}\log(2+x)-\dfrac{1}{3}\log4-\dfrac{3}{5}\log3-\dfrac{1}{5}\log5 & x\ge 2\\[2mm] \dfrac{4}{5}\log(3-x)-\dfrac{1}{5}\log(3+x)-\dfrac{3}{5}\log3 & -2<x<2\end{cases}.$$

3. Sia $f(x)=o\left[x^2\right]$ per $x\to0^+$. Dimostrare o confutare che $(x-1)f(x)=o\left[x^3\right]$ per $x\to0^+$.

L'affermazione è falsa. Infatti basta prendere $f(x)=x^3$ (che risulta essere $o\left[x^2\right]$ per $x\to0^+$) e verificare che

$$\lim_{x\to0^+}\frac{(x-1)f(x)}{x^3}=\lim_{h\to0}\frac{f(x)}{x^2}-\lim_{h\to0}\frac{f(x)}{x^3}=-1\ne0.$$

4. Applicando la definizione di convergenza di una serie numerica, stabilire il carattere della serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{(k+2)(k+4)}$ e, in caso di convergenza, trovarne la somma.

La serie è telescopica. Infatti si ha $\dfrac{2}{(k+2)(k+4)}=\dfrac{1}{(k+2)}-\dfrac{1}{(k+4)}$ da cui si ricava

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+2)}-\frac{1}{(k+4)}=\frac{7}{12}-\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}\xrightarrow{n\to\infty}\frac{7}{12}$$

che, per definizione, rappresenta la somma.