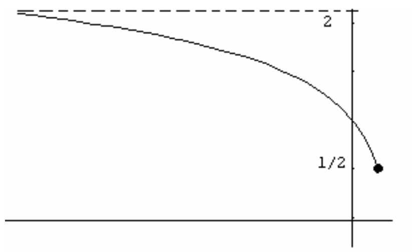
1. Siano $f(x)=\dfrac{2x+1}{x+2}$ e $g(x)=\sqrt{1-x}$. Disegnare il grafico della finzione $f\circ g$.

Si ha $F(x)=(f\circ g)(x)=\dfrac{2\sqrt{1-x}+1}{\sqrt{1-x}+2}$. Da cui $D_F=(-\infty,1]$, $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=2$, $F(0)=1$, $F(1)=\dfrac{1}{2}$.

Inoltre $F'(x)=-\dfrac{3}{2\sqrt{1-x}\left(\sqrt{1-x}+2\right)^2}$, quindi F è decrescente in D. Allora il grafico è



2. Determinare l'insieme di derivabilità della funzione $f(x)=\left|\log_{\frac{1}{2}}|x+2|\right|-1$

Si ha $f(x)=\begin{cases}\log_{1/2}(x+2)-1 & \text{se } -2<x\le -1\\ -\log_{1/2}(x+2)-1 & \text{se } x>-1\\ \log_{1/2}(-x-2)-1 & \text{se } -3\le x<-2\\ -\log_{1/2}(-x-2)-1 & \text{se } x<-3\end{cases}$ e $D_f=\mathbb{R}-\{-2\}$. Quindi

$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{\log(1/2)}{x+2} & \text{se } -2<x<-1\\ -\dfrac{\log(1/2)}{x+2} & \text{se } x>-1\\ \dfrac{\log(1/2)}{x+2} & \text{se } -3<x<-2\\ -\dfrac{\log(1/2)}{x+2} & \text{se } x<-3\end{cases}$. Poiché $\lim\limits_{x\to-1^{\pm}}f'(x)=\mp\log(1/2)$ e $\lim\limits_{x\to-3^{\pm}}f'(x)=\mp\log(1/2)$

segue che -3 e -1 sono punti angolosi per f. Quindi l'insieme di derivabilità è $D_f-\{-3,-1\}$.

3. Determinare l'estremo superiore e inferiore della successione $a_n=n\,e^{-\sqrt{n}}$ $(n\ge 1)$.

Sia $f(x)=\dfrac{x}{e^{\sqrt{x}}}, x\ge 1$. Si ha $f(1)=\dfrac{1}{e}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, $f'(x)=\dfrac{2\sqrt{x}-x}{2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}}$. Allora x = 4 risulta un punto di massimo assoluto nell'intervallo $[1,+\infty)$. Quindi si ha che $\sup a_n=\max a_n=a_4=4e^{-2}$ e $\inf a_n=0$.

4. Sia $f(x)=x^7+x$. Verificare che f è invertibile su $\mathbb{R}$. Verificare che la funzione inversa f^{-1} è derivabile su $\mathbb{R}$ e calcolare $\left(f^{-1}\right)'(0)$ e $\left(f^{-1}\right)'(2)$.

Poiché $f'(x)=7x^6+1>0, \forall x\in\mathbb{R}$, f è strettamente crescente in $\mathbb{R}$ e quindi ivi invertibile. Dal teorema sulla derivabilità delle funzioni inverse segue la derivabilità su $\mathbb{R}$ di f^{-1} e inoltre che $\left(f^{-1}\right)'(y)=\dfrac{1}{7\left[\left(f^{-1}\right)(y)\right]^6+1}$. Dalle eq. $\left[\left(f^{-1}\right)(0)\right]^7+\left(f^{-1}\right)(0)=0$ e $\left[\left(f^{-1}\right)(2)\right]^7+\left(f^{-1}\right)(2)=2$ si ottiene rispettivamente $\left(f^{-1}\right)(0)=0$ e $\left(f^{-1}\right)(2)=1$. Quindi $\left(f^{-1}\right)'(0)=1$ e $\left(f^{-1}\right)'(2)=\dfrac{1}{8}$.