1. Calcolare, al variare del parametro reale positivo p, $\lim_{x\to+\infty}\left[(x^p+2)^{\frac{1}{p}} - x \right]$.

Si ha, $\lim_{x\to+\infty}\left[(x^p+2)^{\frac{1}{p}} - x \right] = \lim_{x\to+\infty} x\left[(1+\frac{2}{x^p})^{\frac{1}{p}} - 1 \right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{(1+\frac{2}{x^p})^{\frac{1}{p}} - 1}{\frac{1}{x}} = \frac{0}{0}$. Quindi applicando la regola di De l'Hospital si ottiene

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(1+\frac{2}{x^p})^{\frac{1}{p}} - 1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} 2(1+\frac{2}{x^p})^{\frac{1-p}{p}} x^{1-p} = \begin{cases} 0 & \text{se } p>1 \\ +\infty & \text{se } p<1 \\ 2 & \text{se } p=1 \end{cases}$$

2. Stabilire, al variare del parametro reale k, il numero delle radici reali dell'equazione $x^3-x^2-k-2=0$.

Posto $f(x)=x^3-x^2-k-2$, si ha $f'(x)=3x^2-2x$ da cui risulta che i punti 0 e 2/3 sono rispettivamente punti di massimo e minimo relativo per f. Poiché $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$, $f(0)=-k-2$ e $f\left(\frac{2}{3}\right)=-\frac{58}{27}-k$, analizzando il grafico della funzione ricaviamo che per $k>-2$ la funzione (e quindi l'equazione) ammette una radice reale, per $k=-2$ la funzione (e quindi l'equazione) ammette due radici reali, per $-58/27<k<-2$ la funzione (e quindi l'equazione) ammette tre radici reali, per $k=-58/27$ la funzione (e quindi l'equazione) ammette due radici reali, per $k<-58/27$ la funzione (e quindi l'equazione) ammette una radice reale.

3. Sia f una funzione tale che $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. Studiare, al variare del parametro reale c, il seguente limite $\lim_{x\to+\infty} f(x)\big(c+\arctan(x\sin x)\big)$.

Si ha, per ogni x reale, $f(x)\left(c-\frac{\pi}{2}\right) < f(x)\big(c+\arctan(x\sin x)\big) < f(x)\left(c+\frac{\pi}{2}\right)$. Dal teorema del confronto si ottiene che $\lim_{x\to+\infty} f(x)\big(c+\arctan(x\sin x)\big) = \begin{cases} +\infty & \text{se } c>\frac{\pi}{2} \\ -\infty & \text{se } c<-\frac{\pi}{2} \end{cases}$.

Inoltre si ha, per ogni x reale,

$$f(x)\big(c+\arctan(-x)\big) \le f(x)\big(c+\arctan(x\sin x)\big) \le f(x)\big(c+\arctan(x)\big)$$

ovvero, sfruttando la simmetria della funzione arctan t,

$$f(x)\big(c-\arctan(x)\big) \le f(x)\big(c+\arctan(x\sin x)\big) \le f(x)\big(c+\arctan(x)\big).$$

Ora, sfruttando la proprietà della funzione sin$t$, possiamo asserire che il grafico della funzione intermedia interseca periodicamente, per $x\to+\infty$, quello della funzione minorante $f(x)\big(c-\arctan(x)\big)$ e quello della funzione maggiorante $f(x)\big(c+\arctan(x)\big)$. Se $-\frac{\pi}{2}<c<\frac{\pi}{2}$ si ottiene definitivamente $\big(c-\arctan(x)\big)<0$ e $\big(c+\arctan(x)\big)>0$, per cui la funzione $f(x)\big(c+\arctan(x\sin x)\big)$, al tendere di x all'infinito, oscillerà assumendo periodicamente valori positivi e negativi. In tal caso possiamo affermare che il limite non esiste. Infine, se $c = \pm \frac{\pi}{2}$ non possiamo affermare nulla senza conoscere l'espressione esplicita di *f*. Infatti se $f(x) = x$ si ottiene la convergenza a 0 della funzione $f(x)\left(c + \arctan\left(x \sin x\right)\right)$, mentre se $f(x) = e^x$ si ottiene la divergenza della stessa.

4. Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni irregolari. Stabilire se sia vera o falsa l'affermazione secondo cui anche la successione $\{a_n b_n\}$ risulta essere irregolare.

Per confutare l'affermazione basta prendere come esempio le due successioni irregolari $\left\{(-1)^n\right\}$ e $\left\{(-1)^{n+1}\right\}$. La relativa successione prodotto è $\left\{(-1)^{2n+1}\right\} = \left\{-1\right\}_{n=1}^{\infty}$ che ovviamente converge a -1.