SOLUZIONI DI UNA TRACCIA DELLA PROVA DI CALCOLO 1 DEL 09/02/09 – ING. INF.
(Gli esercizi relativi alle altre tracce si risolvono in modo analogo).

1. Determinare il dominio della funzione $f(x)=\sqrt{\dfrac{\log^2_{\frac{1}{2}}(x-1)-\log_{\frac{1}{2}}(x-1)^2}{\log x-\log\left(x^2+1\right)}}$.

Studiando gli argomenti dei quattro logaritmi risulta $x>1$. *Inoltre si ha*

$$\frac{\log^2_{\frac{1}{2}}(x-1)-\log_{\frac{1}{2}}(x-1)^2}{\log x-\log\left(x^2+1\right)}\geq 0 \quad con \quad \log x-\log\left(x^2+1\right)\neq 0.$$

Studiando il segno del numeratore si ottiene:

$$\log^2_{\frac{1}{2}}(x-1)-\log_{\frac{1}{2}}(x-1)^2\geq 0 \quad\Rightarrow\quad \log_{\frac{1}{2}}(x-1)\left[\log_{\frac{1}{2}}(x-1)-2\right]\geq 0,$$

da cui

$$\log_{\frac{1}{2}}(x-1)\geq 0 \quad\Rightarrow\quad x-1\leq 1 \quad\Rightarrow\quad x\leq 2$$

e

$$\log_{\frac{1}{2}}(x-1)-2\geq 0 \quad\Rightarrow\quad x-1\leq\frac{1}{4} \quad\Rightarrow\quad x\leq\frac{5}{4}.$$

Quindi il numeratore risulta non negativo in $\left(1,\frac{5}{4}\right]\cup[2,+\infty)$ *e negativo altrove per* $x>1$.

Studiando il segno del denominatore si ottiene:

$$\log x-\log\left(x^2+1\right)>0 \quad\Rightarrow\quad \log x>\log\left(x^2+1\right) \quad\Rightarrow\quad x>x^2+1.$$

Non essendo mai verificata, per $x>1$, *l'ultima disuguaglianza, il denominatore risulta negativo per* $x>1$. *Confrontando, infine, i segni del numeratore e del denominatore della funzione sotto radice si ottiene il dominio di f, cioè* $\left[\frac{5}{4},2\right]$.

2. *Sia* $f(x)=e^{x^3}+x$ *con* $x\in\mathbb{R}$. *Detta g l'inversa di f, determinare il dominio e l'insieme di derivabilità di g. Quindi calcolare* $g'(1)$.

Si ha $f'(x)=3x^2e^{x^3}+1>0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$, *da cui risulta che f è crescente e ha come codominio l'intervallo* $\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=(-\infty,+\infty)$. *La funzione inversa g è allora definita e derivabile in* $\mathbb{R}$. *Inoltre si ha* $g'(1)=\dfrac{1}{3[g(1)]^2e^{[g(1)]^3}+1}$. *Posto* $g(1)=x_0$ *si ha* $1=e^{x_0^3}+x_0$ da cui si ottiene $x_0=0$. *Quindi risulta* $g'(1)=1$.

3. Verificare, con la definizione di limite di successione, che $\lim\limits_{n\to+\infty}\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{n+1}{n^2-n}=+\infty$.

Occorre verificare che $\forall \mathrm{M}>0\,\exists\delta_{\mathrm{M}}>0/\forall n>\delta_{\mathrm{M}}\Rightarrow\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{n+1}{n^2-n}>\mathrm{M}$. *Risolvendo l'ultima disequazione si ottiene*

$$\log_{\frac{1}{3}} \frac{n+1}{n^2-n} > \mathrm{M} \quad \Rightarrow \quad \frac{n+1}{n^2-n} < \frac{1}{3^{\mathrm{M}}} \quad \Rightarrow \quad \frac{n^2-\left(1+3^{\mathrm{M}}\right)-3^{\mathrm{M}}}{3^{\mathrm{M}}\left(n^2-n\right)} > 0 .$$

Il *denominatore risulta sempre positivo, mentre il numeratore risulta positivo per* $n > \dfrac{\left(1+3^{\mathrm{M}}\right)+\sqrt{\left(1+3^{\mathrm{M}}\right)+4\cdot 3^{\mathrm{M}}}}{2}$. *Il limite è verificato per* $\delta_{\mathrm{M}} = \dfrac{\left(1+3^{\mathrm{M}}\right)+\sqrt{\left(1+3^{\mathrm{M}}\right)+4\cdot 3^{\mathrm{M}}}}{2}$.

4. Applicare il teorema della derivabilità delle funzioni composte per studiare, nel rispettivo dominio, la derivabilità di $F(x)=\left|(x-1)^5\right|$. Nei punti in cui non è possibile stabilire la derivabilità di *F* con il suddetto teorema studiarla con il limite del rapporto incrementale.

Si ha $F = g \circ f$ *dove* $f(x)=(x-1)^5$ *e* $g(y)=|y|$. *Mentre f è derivabile in* $\mathbb{R}$, *g è derivabile in* $\mathbb{R}-\{y=0\}$. *Poiché* $y=0$ *se* $x=1$, *dal teorema della derivabilità delle funzioni composte si ottiene la derivabilità di F in* $\mathbb{R}-\{x=1\}$. *In* $x=1$ *si ha*

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(1+h)-F(1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\left|h^5\right|}{h} = \lim_{h\to 0} h^4 = 0 .$$

Per cui F risulta derivabile anche in $x=1$.