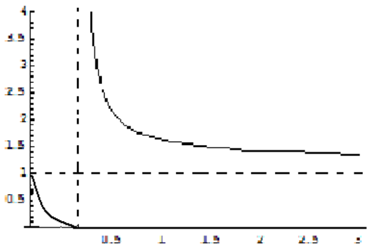
SOL. PROVA INTERMEDIA DI CALCOLO 1
Collegio Didattico di Ingegneria Civile - 20 dicembre 2010

1. Tracciare il grafico della funzione $f(x)=e^{\frac{1}{\ln x+2}}$.

$D_f=\mathbb{R}^+-\{e^{-2}\}$. $f(x)>0$ in D_f. f è derivabile in D_f. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1$; $\lim\limits_{x\to (e^{-2})^-} f(x)=0$; $\lim\limits_{x\to (e^{-2})^+} f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=1$. $f'(x)=\dfrac{-f(x)}{x(\ln x+2)^2}$; $f'(x)<0$ in D_f. Quindi f è strett. decrescente in $(0,e^{-2})$ e in $(e^{-2},+\infty)$. $f''(x)=\dfrac{f(x)\left[(\ln x+2)+1\right]^2}{x^2(\ln x+2)^4}$; $f''(x)>0$ in D_f. Quindi f è convessa in $(0,e^{-2})$ e in $(e^{-2},+\infty)$.



2. Calcolare il limite $\lim\limits_{n\to+\infty}(-1)^n\dfrac{\sin\left(\frac{3}{n}\right)\left[n-\sqrt{n^2+7}\right]}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$.

$$\lim_{n\to+\infty}(-1)^n\frac{\sin\left(\frac{3}{n}\right)\left[n-\sqrt{n^2+7}\right]}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}=\lim_{n\to+\infty}(-1)^n\frac{-7\sin\left(\frac{3}{n}\right)}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\left[n+\sqrt{n^2+7}\right]}$$

$=(-21)\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+\sqrt{n^2+7}}\dfrac{\sin\left(\frac{3}{n}\right)}{\left(\frac{3}{n}\right)}\dfrac{\left(\frac{1}{n}\right)}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}=0$, perché passando alle funzioni associate e ponendo $x=1/t$ si ha $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin\left(\frac{3}{x}\right)}{\left(\frac{3}{x}\right)}=\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{\sin(3t)}{3t}=1$ e $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\frac{1}{x}\right)}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{t}{\ln(1+t)}=1$,

mentre dal teorema del confronto risulta $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+\sqrt{n^2+7}}=0$

3. Discutere, al variare del parametri reali α e β, la derivabilità in $I=(0,2\pi)$ della funzione

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{|\cos x|} & \text{se } x\in I-\left\{\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3}{2}\pi\right\}\\ \alpha-1 & \text{se } x=\dfrac{\pi}{2}\\ \beta+1 & \text{se } x=\dfrac{3}{2}\pi\end{cases}$$

, classificando, se possibile, i punti di non derivabilità.

Si ha $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\sqrt{|\cos x|}=0$; quindi f è continua in $\dfrac{\pi}{2}$ solo se $\alpha=1$. Analogamente $\lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{2}} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{2}}\sqrt{|\cos x|}=0$; quindi f è continua in $\dfrac{3\pi}{2}$ solo se $\beta=-1$. Siano $\alpha=1$ e $\beta=-1$; in un intorno sinistro di $\dfrac{\pi}{2}$ e in un intorno destro di $\dfrac{3\pi}{2}$ si ha $f(x)=\sqrt{\cos x}$, quindi $f'(x)=\dfrac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$ da cui segue $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f'(x)=-\infty$ e $\lim\limits_{x\to\left(\frac{3\pi}{2}\right)^+} f'(x)=+\infty$; mentre in un intorno destro di $\dfrac{\pi}{2}$ e in un intorno sinistro di $\dfrac{3\pi}{2}$ si ha $f(x)=\sqrt{-\cos x}$, quindi $f'(x)=\dfrac{\sin x}{2\sqrt{-\cos x}}$ da cui segue $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+} f'(x)=+\infty$ e $\lim\limits_{x\to\left(\frac{3\pi}{2}\right)^-} f'(x)=-\infty$. Allora, indipendentemente da α e β, f non è derivabile in $\dfrac{\pi}{2}$ e in $\dfrac{3\pi}{2}$ che sono punti cuspidali solo se $\alpha=1$ e $\beta=-1$ rispettivamente.

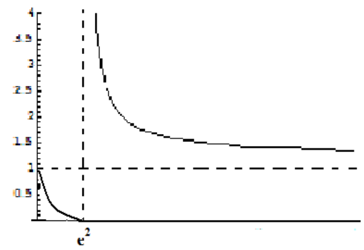
4. Sia $a_n=\dfrac{1+n^2}{3+n^2}$. Dimostrare, mediante la definizione, che $\sup\{a_n\}=1$.

$\forall n\in\mathbb{N},\ 1\geq a_n$ infatti $1\geq\dfrac{1+n^2}{3+n^2}\Rightarrow 3\geq 1$. Inoltre $\forall\varepsilon>0\ \exists\bar{n}\in\mathbb{N}\ /\ a_{\bar{n}}>1-\varepsilon$, infatti basta prendere tutti i naturali $\bar{n}>\sqrt{\dfrac{2}{\varepsilon}-3}$.

SOL. PROVA INTERMEDIA DI CALCOLO 1
Collegio Didattico di Ingegneria Civile - 20 dicembre 2010

1. Tracciare il grafico della funzione $f(x)=e^{\frac{1}{\ln x-2}}$.

$D_f=\mathbb{R}^+-\{e^2\}$. $f(x)>0$ in D_f. f è derivabile in D_f. $\lim_{x\to 0^+} f(x)=1$; $\lim_{x\to\left(e^{-2}\right)^-} f(x)=0$; $\lim_{x\to\left(e^{-2}\right)^+} f(x)=+\infty$; $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$. $f'(x)=\dfrac{-f(x)}{x\left(\ln x-2\right)^2}$; $f'(x)<0$ in D_f. Quindi f è strett. decrescente in $\left(0,e^2\right)$ e in $\left(e^2,+\infty\right)$. $f''(x)=\dfrac{f(x)\left[\left(\ln x+2\right)+1\right]^2}{x^2\left(\ln x+2\right)^4}$; $f''(x)>0$ in D_f. Quindi f è convessa in $\left(0,e^{-2}\right)$ e in $\left(e^{-2},+\infty\right)$.



2. Calcolare il limite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin\left(\frac{2}{n}\right)\left[n-\sqrt{n^2+3}\right]}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}\cdot\sin(n)$.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin\left(\frac{2}{n}\right)\left[n-\sqrt{n^2+3}\right]}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}\sin(n)=\lim_{n\to+\infty}\frac{-3\sin\left(\frac{2}{n}\right)}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\left[n+\sqrt{n^2+3}\right]}\sin(n)$$

$=(-6)\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin(n)}{n+\sqrt{n^2+3}}\,\frac{\sin\left(\frac{2}{n}\right)}{\left(\frac{2}{n}\right)}\,\frac{\left(\frac{1}{n}\right)}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}=0$, perché passando alle funzioni associate e ponendo $x=1/t$ si ha $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin\left(\frac{2}{x}\right)}{\left(\frac{2}{x}\right)}=\lim_{t\to0^+}\frac{\sin(2t)}{2t}=1$ e $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{t\to0^+}\frac{t}{\ln(1+t)}=1$,

mentre dal teorema del confronto risulta $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin(n)}{n+\sqrt{n^2+3}}=0$

3. Discutere, al variare del parametri reali α e β, la derivabilità in $I=\left(-\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi\right)$ della funzione

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{|\sin x|} & \text{se } x\in I-\{0,\pi\}\\ \alpha+1 & \text{se } x=0\\ \beta-1 & \text{se } x=\pi\end{cases}$$

, classificando, se possibile, i punti di non derivabilità.

Si ha $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{|\sin x|}=0$; quindi f è continua in 0 solo se $\alpha=-1$. Analogamente $\lim\limits_{x\to\pi} f(x)=\lim\limits_{x\to\pi}\sqrt{|\sin x|}=0$; quindi f è continua in π solo se $\beta=1$. Siano $\alpha=-1$ e $\beta=1$; in un intorno sinistro di 0 e in un intorno destro di π si ha $f(x)=\sqrt{-\sin x}$, quindi $f'(x)=\frac{-\cos x}{2\sqrt{-\sin x}}$ da cui segue $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=-\infty$ e $\lim\limits_{x\to\pi^+} f'(x)=+\infty$; mentre in un intorno destro di 0 e in un intorno sinistro di π si ha $f(x)=\sqrt{\sin x}$, quindi $f'(x)=\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$ da cui segue $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=+\infty$ e $\lim\limits_{x\to\pi^-} f'(x)=-\infty$. Allora, indipendentemente da α e β, f non è derivabile in 0 e in π che sono punti cuspidali solo se $\alpha=-1$ e $\beta=1$ rispettivamente.

4. Sia $a_n=\frac{3+n^2}{1+n^2}$. Dimostrare, mediante la definizione, che $\inf\{a_n\}=1$.

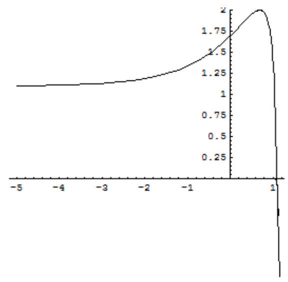
$\forall n\in\mathbb{N},\ 1\le a_n$ infatti $1\le\frac{3+n^2}{1+n^2}\Rightarrow 1\le 3$. Inoltre $\forall\varepsilon>0\,\exists\bar{n}\in\mathbb{N}\,/\,a_{\bar{n}}<1+\varepsilon$, infatti basta prendere tutti i naturali $\bar{n}>\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}-1}$.

SOL. PROVA INTERMEDIA DI CALCOLO 1
Collegio Didattico di Ingegneria Civile - 21 dicembre 2010

1. Tracciare il grafico della funzione $f(x)=\ln\left(3-e^x\right)+e^x$. (*Sugg.*: $f\left(1.08\right)\approx 0$).

$D_f=\left(-\infty,\ln 3\right)$. $f\left(0\right)=\ln 2+1\approx 1.7$. f è derivabile in D_f. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\ln 3$; $\lim\limits_{x\to(\ln 3)^-} f(x)=-\infty$.

$f'(x)=\dfrac{2-e^x}{3-e^x}e^x$; $f'(x)>0$ in $\left(-\infty,\ln 2\right)$, $f'(x)<0$ in $\left(\ln 2,\ln 3\right)$ e $f'(x)=0$ in $\ln 2$. Quindi f è strett. crescente in $\left(-\infty,\ln 2\right)$, strett. decrescente in $\left(\ln 2,\ln 3\right)$ e $x=\ln 2$ è punto di massimo assoluto ($f\left(\ln 2\right)=2$). $f''(x)=\dfrac{e^x}{\left(3-e^x\right)^2}\left(e^{2x}-6e^x+6\right)$; $f''(x)>0$ in $\left(-\infty,\ln\left(3-\sqrt{3}\right)\right)$, $f''(x)<0$ in $\left(\ln\left(3-\sqrt{3}\right),\ln 3\right)$ e $f''(x)=0$ in $x=\ln\left(3-\sqrt{3}\right)$. Quindi f è convessa in $\left(-\infty,\ln\left(3-\sqrt{3}\right)\right)$, f è concava in $\left(\ln\left(3-\sqrt{3}\right),\ln 3\right)$ e $x=\ln\left(3-\sqrt{3}\right)\approx 0.24$ è un punto di flesso $f\left(3-\ln\sqrt{3}\right)\approx 1.82$.



2. Calcolare il limite $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)^2\ln\left(e^3+\frac{1}{n}\right)^n}{\sqrt{n+4}}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)^2\ln\left(e^3+\frac{1}{n}\right)^n}{\sqrt{n+4}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)^2\ln\left(e^3+\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n+4}}=0$, perché passando alla funzione associata, ponendo $x=1/t$ e applicando la regola di de l'Hospital si ha $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)^2=\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{\left(1-\cos t\right)^2}{t}=\lim\limits_{t\to0^+}2\left(1-\cos t\right)\sin t=0$, mentre $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln\left(e^3+\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n+4}}=0$.

3. Discutere, al variare del parametro reale α, la derivabilità in $\mathbb{R}$ della funzione $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin\left(3x\right)}{x}+\sqrt{|x|} & \text{se } x\neq 0\\ \alpha+1 & \text{se } x=0\end{cases}$, classificando, se possibile, i punti di non derivabilità.

Si ha $\lim\limits_{x\to0} f(x)=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin\left(3x\right)}{x}+\sqrt{|x|}\right)=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{3\sin\left(3x\right)}{3x}+\sqrt{|x|}\right)=3$; quindi f è continua in 0 solo se $\alpha=2$. Sia $\alpha=2$; in un intorno sinistro di 0 si ha $f(x)=\dfrac{\sin\left(3x\right)}{x}+\sqrt{-x}$, quindi $f'(x)=\dfrac{3x\cos\left(3x\right)-\sin\left(3x\right)}{x^2}-\dfrac{1}{2\sqrt{-x}}$ da cui segue $\lim\limits_{x\to0^-} f'(x)=-\infty$, poiché per la regola di de l'Hospital $\lim_{x\to 0^-}\frac{3x\cos(3x)-\sin(3x)}{x^2}=-\frac{9}{2}\lim_{x\to 0^-}\sin(3x)=0$; mentre in un intorno destro di 0 si ha $f(x)=\frac{\sin(3x)}{x}+\sqrt{x}$, quindi $f'(x)=\frac{3x\cos(3x)-\sin(3x)}{x^2}+\frac{1}{2\sqrt{x}}$ da cui segue $\lim_{x\to 0^+} f'(x)=+\infty$. Allora, indipendentemente da α, f non è derivabile in 0 che è punto cuspidale solo se $\alpha=2$.

4. Sia $A=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x=\frac{1+2n^2}{2+n^2},\forall n\in\mathbb{N}\right\}$. Dimostrare, mediante la definizione, $2\in\mathcal{D}A$.

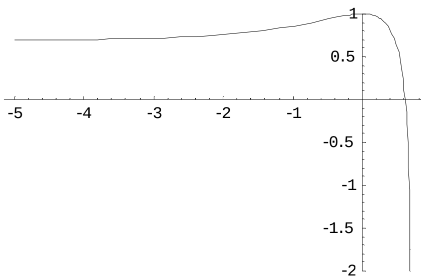
$\forall\delta>0\ \exists\overline{n}\in\mathbb{N}\,/\,2-\delta<a_{\overline{n}}<2$, infatti basta prendere tutti i naturali $\overline{n}>\sqrt{\frac{3}{\delta}-2}$.

SOL. **PROVA INTERMEDIA DI CALCOLO 1**
Collegio Didattico di Ingegneria Civile - 21 dicembre 2010

1. Tracciare il grafico della funzione $f(x)=\ln\left(2-e^{x}\right)+e^{x}$. (*Sugg.*: $f\left(0.61\right)\approx 0$).

$D_f=\left(-\infty,\ln 2\right)$. $f\left(0\right)=1$. f è derivabile in D_f. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\ln 2$; $\lim\limits_{x\to(\ln 2)^-} f(x)=-\infty$.

$f'(x)=\dfrac{1-e^{x}}{2-e^{x}}e^{x}$; $f'(x)>0$ in $\left(-\infty,0\right)$, $f'(x)<0$ in $\left(0,\ln 2\right)$ e $f'(x)=0$ in 0. Quindi *f* è strett. crescente in $\left(-\infty,0\right)$, strett. decrescente in $\left(0,\ln 2\right)$ e $x=0$ è punto di massimo assoluto. $f''(x)=\dfrac{e^{x}}{\left(2-e^{x}\right)^{2}}\left(e^{2x}-4e^{x}+2\right)$; $f''(x)>0$ in $\left(-\infty,\ln\left(2-\sqrt{2}\right)\right)$, $f''(x)<0$ in $\left(\ln\left(2-\sqrt{2}\right),\ln 2\right)$ e $f''(x)=0$ in $x=\ln\left(2-\sqrt{2}\right)$. Quindi *f* è convessa in $\left(-\infty,\ln\left(2-\sqrt{2}\right)\right)$, *f* è concava in $\left(\ln\left(2-\sqrt{2}\right),\ln 2\right)$ e $x=\ln\left(2-\sqrt{2}\right)\approx -0.53$ è un punto di flesso $f\left(3-\ln\sqrt{3}\right)\approx 0.93$.



2. Calcolare il limite $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)^{2}\ln\left(e^{2}+\frac{1}{n}\right)^{n}}{\sqrt{n+1}}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)^{2}\ln\left(e^{2}+\frac{1}{n}\right)^{n}}{\sqrt{n+1}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)^{2}\ln\left(e^{2}+\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n+1}}=0$, perché passando alla funzione associata, ponendo $x=1/t$ e applicando la regola di de l'Hospital si ha $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)^{2}=\lim\limits_{t\to0^{+}}\dfrac{\left(1-\cos t\right)^{2}}{t}=\lim\limits_{t\to0^{+}}2\left(1-\cos t\right)\sin t=0$, mentre $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln\left(e^{2}+\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n+1}}=0$.

3. Discutere, al variare del parametro reale α, la derivabilità in $\mathbb{R}$ della funzione $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin\left(5x\right)}{x}-\sqrt{|x|} & \text{se } x\neq 0\\ \alpha-1 & \text{se } x=0\end{cases}$, classificando, se possibile, i punti di non derivabilità.

Si ha $\lim\limits_{x\to0} f(x)=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin\left(5x\right)}{x}-\sqrt{|x|}\right)=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{5\sin\left(5x\right)}{5x}-\sqrt{|x|}\right)=5$; quindi *f* è continua in 0 solo se $\alpha=6$. Sia $\alpha=6$; in un intorno sinistro di 0 si ha $f(x)=\dfrac{\sin\left(5x\right)}{x}-\sqrt{-x}$, quindi $f'(x)=\dfrac{5x\cos\left(5x\right)-\sin\left(5x\right)}{x^{2}}+\dfrac{1}{2\sqrt{-x}}$ da cui segue $\lim\limits_{x\to0^{-}} f'(x)=+\infty$, poiché per la regola di de l'Hospital $\lim_{x\to 0^-}\dfrac{5x\cos(5x)-\sin(5x)}{x^2}=-\dfrac{25}{2}\lim_{x\to 0^-}\sin(5x)=0$; mentre in un intorno destro di 0 si ha $f(x)=\dfrac{\sin(5x)}{x}-\sqrt{x}$, quindi $f'(x)=\dfrac{5x\cos(5x)-\sin(5x)}{x^2}-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ da cui segue $\lim_{x\to 0^+} f'(x)=-\infty$. Allora, indipendentemente da α, f non è derivabile in 0 che è punto cuspidale solo se $\alpha=6$.

4. Sia $A=\left\{x\in\mathbb{R} \,/\, x=\dfrac{1-2n^2}{2+n^2}, \forall n\in\mathbb{N}\right\}$. Dimostrare, mediante la definizione, $-2\in\mathcal{D}A$.

$\forall\delta>0\ \exists\bar{n}\in\mathbb{N} \,/\, -2<a_{\bar{n}}<-2+\delta$, infatti basta prendere tutti i naturali $\bar{n}>\sqrt{\dfrac{5}{\delta}-2}$.