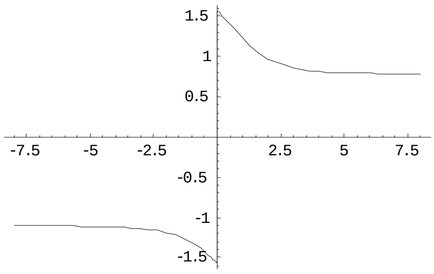
SOL. PROVA INTERMEDIA DI ANALISI MATEMATICA (A1)
Collegio Didattico di Ingegneria Informatica - 22 dicembre 2010

1. Tracciare il grafico della funzione $f(x)=\arctan\left(\frac{e^x+2}{e^x-1}\right)$.

$D_f=\mathbb{R}-\{0\}$. f è derivabile in D_f. $f(x)<0$ in $(-\infty,0)$ e $f(x)>0$ in $(0,+\infty)$. $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\arctan(-2)\approx-1.1$; $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{\pi}{4}\approx 0.78$; $\lim_{x\to 0^\pm} f(x)=\pm\frac{\pi}{2}\approx\pm 1.57$ perché $\lim_{x\to 0^\pm}\frac{e^x+2}{e^x-1}=\pm\infty$. $f'(x)=\frac{-3e^x}{2e^{2x}+2e^x+5}$; $f'(x)<0$ in D_f. Quindi f è strett. decrescente in $(-\infty,0)$ e in $(0,+\infty)$. $f''(x)=\frac{3e^x\left(2e^{2x}-5\right)}{\left(2e^{2x}+2e^x+5\right)^2}$; $f''(x)<0$ in $(-\infty,0)\cup\left(0,\ln\sqrt{5/2}\right)$, $f''(x)>0$ in $\left(\ln\sqrt{5/2},+\infty\right)$ e $f''(x)=0$ in $x=\ln\sqrt{5/2}\approx 0.46$. Quindi f è concava in $(-\infty,0)$ e in $\left(0,\ln\sqrt{5/2}\right)$, f è convessa in $\left(\ln\sqrt{5/2},+\infty\right)$, $x=\ln\sqrt{5/2}\approx 0.46$ è un punto di flesso $f\left(\ln\sqrt{5/2}\right)\approx 1.4$.



2. Calcolare, al variare del parametro reale α, il limite $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1+e^{\sin x}}{2}\right)^{3/x^\alpha}$.

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1+e^{\sin x}}{2}\right)^{3/x^\alpha}=\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{3}{x^\alpha}\ln\left(\frac{1+e^{\sin x}}{2}\right)}$$

$\lim_{x\to 0^+}\frac{3}{x^\alpha}\ln\left(\frac{1+e^{\sin x}}{2}\right)=0$ se $\alpha\le 0$. Sia $\alpha>0$. Allora si ha

$\lim_{x\to 0^+}\frac{3}{x^\alpha}\ln\left(\frac{1+e^{\sin x}}{2}\right)=\infty\cdot 0$ ovvero $\lim_{x\to 0^+}\frac{3\ln\left(\frac{1+e^{\sin x}}{2}\right)}{x^\alpha}=\frac{0}{0}$. Per la regola di De l'Hospital si ha

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{3\ln\left(\frac{1+e^{\sin x}}{2}\right)}{x^\alpha}=3\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\sin x}\cos x}{\left(1+e^{\sin x}\right)\alpha x^{\alpha-1}}=\begin{cases}0 & \text{se } \alpha<1\\ 3/2 & \text{se } \alpha=1\\ +\infty & \text{se } \alpha>1\end{cases}.$$

Quindi $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1+e^{\sin x}}{2}\right)^{3/x^\alpha}=\begin{cases}1 & \text{se } \alpha<1\\ e^{3/2} & \text{se } \alpha=1\\ +\infty & \text{se } \alpha>1\end{cases}$.

3. Utilizzare le definizioni per stabilire la limitatezza o meno (superiore ed inferiore) di $A=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x=\left(\frac{1}{n+2}\right)^{(-1)^n},\forall n\in\mathbb{N}\right\}$ e, là dove limitato, per determinare il $\sup A$ e l'$\inf A$.

$A=B\cup C$, con $B=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x=\frac{1}{2n+2},\forall n\in\mathbb{N}\right\}$ e $C=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x=2n+1,\forall n\in\mathbb{N}\right\}$. Gli elementi di *B* sono tutti strettamente minori degli elementi di *C*. Quest'ultimo è illimitato superiormente, infatti $\forall \mathrm{M}>0,\exists n\in\mathbb{N}\,/\,2n+1>\mathrm{M}$; basta prendere tutti gli $n>\frac{\mathrm{M}-1}{2}$. Poiché tutti gli elementi di *B* sono positivi esso è limitato inferiormente da 0 che è anche il suo estremo inferiore, infatti $\forall\varepsilon>0,\exists n\in\mathbb{N}\,/\,\frac{1}{2n+2}<\varepsilon$; basta prendere tutti gli $n>\frac{1}{2\varepsilon}-1$. Quindi *A* è illimitato superiormente e $\inf A=0$.

4. Dimostrare che, $\forall n\in\mathbb{N}$, si ha $D_x\frac{1}{x^n}=-\frac{n}{x^{n+1}}$.

Per $n=1$ la proprietà è verificata. Sia verificata per un particolare $\bar{n}\in\mathbb{N}$ cioè $D_x\frac{1}{x^{\bar{n}}}=-\frac{\bar{n}}{x^{\bar{n}+1}}$, si dimostra anche che $D_x\frac{1}{x^{\bar{n}+1}}=-\frac{\bar{n}+1}{x^{\bar{n}+2}}$. Infatti

$$D_x\frac{1}{x^{\bar{n}+1}}=D_x\left(\frac{1}{x^{\bar{n}}}\cdot\frac{1}{x}\right)=D_x\left(\frac{1}{x^{\bar{n}}}\right)\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x^{\bar{n}}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{\bar{n}}{x^{\bar{n}+2}}-\frac{1}{x^{\bar{n}+2}}=-\frac{\bar{n}+1}{x^{\bar{n}+2}}.$$

SOL. PROVA INTERMEDIA DI ANALISI MATEMATICA (A2)
Collegio Didattico di Ingegneria Informatica - 22 dicembre 2010

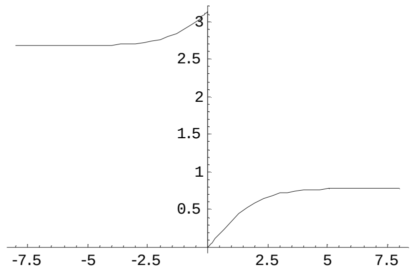
1. Tracciare il grafico della funzione $f(x) = \operatorname{arccotan}\left(\frac{e^x+2}{e^x-1}\right)$.

$D_f = \mathbb{R} - \{0\}$. f è derivabile in D_f. $f(x) > 0$ in D_f. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \operatorname{arccotan}(-2) \approx 2.7$;

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi}{4} \approx 0.78$; $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \pi$ e $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$ perché $\lim_{x\to 0^\pm} \frac{e^x+2}{e^x-1} = \pm\infty$.

$f'(x) = \frac{3e^x}{2e^{2x}+2e^x+5}$; $f'(x) > 0$ in D_f. Quindi f è strett. crescente in $(-\infty, 0)$ e in $(0, +\infty)$.

$f''(x) = \frac{3e^x\left(5-2e^{2x}\right)}{\left(2e^{2x}+2e^x+5\right)^2}$; $f''(x) > 0$ in $(-\infty,0)\cup\left(0,\ln\sqrt{5/2}\right)$, $f''(x) < 0$ in $\left(\ln\sqrt{5/2},+\infty\right)$ e $f''(x) = 0$ in $x = \ln\sqrt{5/2} \approx 0.46$. Quindi f è convessa in $(-\infty,0)$ e in $\left(0,\ln\sqrt{5/2}\right)$, f è concava in $\left(\ln\sqrt{5/2},+\infty\right)$, $x = \ln\sqrt{5/2} \approx 0.46$ è un punto di flesso $f\left(\ln\sqrt{5/2}\right) \approx 1.4$.



2. Calcolare, al variare del parametro reale α, il limite $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2+5^{\sin x}}{3}\right)^{2/x^\alpha}$.

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2+5^{\sin x}}{3}\right)^{2/x^\alpha} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{2}{x^\alpha}\ln\left(\frac{2+5^{\sin x}}{3}\right)}$$

$\lim_{x\to 0^+}\frac{2}{x^\alpha}\ln\left(\frac{2+5^{\sin x}}{3}\right) = 0$ se $\alpha \le 0$. Sia $\alpha > 0$. Allora si ha

$\lim_{x\to 0^+}\frac{2}{x^\alpha}\ln\left(\frac{2+5^{\sin x}}{3}\right) = \infty\cdot 0$ ovvero $\lim_{x\to 0^+}\frac{2\ln\left(\frac{2+5^{\sin x}}{3}\right)}{x^\alpha} = \frac{0}{0}$. Per la regola di De l'Hospital si ha

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{2\ln\left(\frac{2+5^{\sin x}}{3}\right)}{x^\alpha} = 2\ln 5 \lim_{x\to 0^+}\frac{5^{\sin x}\cos x}{\left(2+5^{\sin x}\right)\alpha x^{\alpha-1}} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha < 1 \\ (2/3)\ln 5 & \text{se } \alpha = 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha > 1 \end{cases}.$$

Quindi $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2+5^{\sin x}}{3}\right)^{2/x^\alpha} = \begin{cases} 1 & \text{se } \alpha < 1 \\ 5^{2/3} & \text{se } \alpha = 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha > 1 \end{cases}$.

3. Utilizzare le definizioni per stabilire la limitatezza o meno (superiore ed inferiore) di $A=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x=(n+1)^{(-1)^n},\forall n\in\mathbb{N}\right\}$ e, là dove limitato, per determinare il $\sup A$ e l' $\inf A$.

$A=B\cup C$, con $B=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x=\dfrac{1}{2n},\forall n\in\mathbb{N}\right\}$ e $C=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x=2n+1,\forall n\in\mathbb{N}\right\}$. Gli elementi di B sono tutti strettamente minori degli elementi di C. Quest'ultimo è illimitato superiormente, infatti $\forall\mathrm{M}>0,\exists n\in\mathbb{N}\,/\,2n+1>\mathrm{M}$; basta prendere tutti gli $n>\dfrac{\mathrm{M}-1}{2}$. Poiché tutti gli elementi di B sono positivi esso è limitato inferiormente da 0 che è anche il suo estremo inferiore, infatti $\forall\varepsilon>0,\exists n\in\mathbb{N}\,/\,\dfrac{1}{2n}<\varepsilon$; basta prendere tutti gli $n>\dfrac{1}{2\varepsilon}$. Quindi A è illimitato superiormente e $\inf A=0$.

4. Dimostrare che, $\forall n\in\mathbb{N}$, si ha $D_x x^n=n\,x^{n-1}$.

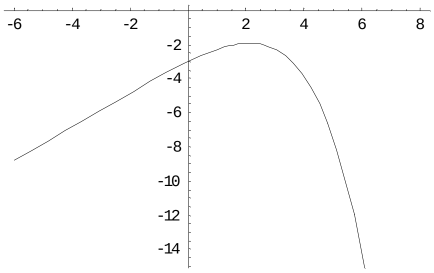
Per $n=1$ la proprietà è verificata. Sia verificata per un particolare $\overline{n}\in\mathbb{N}$ cioè $D_x x^{\overline{n}}=\overline{n}\,x^{\overline{n}-1}$, si dimostra anche che $D_x x^{\overline{n}+1}=(\overline{n}+1)\,x^{\overline{n}}$. Infatti

$D_x x^{\overline{n}+1}=D_x\left(x^{\overline{n}}\cdot x\right)=D_x\left(x^{\overline{n}}\right)\cdot x+x^{\overline{n}}=\overline{n}\,x^{\overline{n}}+x^{\overline{n}}=(\overline{n}+1)\,x^{\overline{n}}$.

SOL. PROVA INTERMEDIA DI ANALISI MATEMATICA (B1)
Collegio Didattico di Ingegneria Informatica - 22 dicembre 2010

1. Tracciare il grafico della funzione $f(x) = x - \sqrt{e^x + 8}$. (*Sugg.*: $f(x) \neq 0 \quad \forall x \in D_f$).

$D_f = \mathbb{R}$. f è derivabile in D_f. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \infty - \infty$; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(1 - \sqrt{\dfrac{e^x+8}{x^2}}\right) = -\infty$ perché applicando due volte la regola di de l'Hospital si ottiene $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^x+8}{x^2} = +\infty$. Dal suggerimento segue che $f(x) < 0$ in D_f. $f'(x) = 1 - \dfrac{e^x}{2\sqrt{e^x+8}}$; $f'(x) > 0$ in $(-\infty, \ln 8)$, $f'(x) < 0$ in $(\ln 8, +\infty)$ e $f'(x) = 0$ in $x = \ln 8$. Quindi f è strett. crescente in $(-\infty, \ln 8)$, strett. decrescente in $(\ln 8, +\infty)$, $x = \ln 8$ è punto di massimo assoluto, $f(\ln 8) \approx -1.7$. $f''(x) = -\dfrac{e^{2x} + 16e^x}{4(e^x+8)\sqrt{e^x+8}}$; $f''(x) < 0$ in D_f. Quindi f è concava in D_f.



2. Calcolare, al variare del parametro reale α, il limite $\lim_{x\to0^+} x^{\alpha/2}\left(e^x - \sqrt{1-(\ln(x+1))^2}\right)$.

$\lim_{x\to0^+} x^{\alpha/2}\left(e^x - \sqrt{1-(\ln(x+1))^2}\right) = 0$ se $\alpha \geq 0$. Sia $\alpha < 0$. Allora si ha

$\lim_{x\to0^+} x^{\alpha/2}\left(e^x - \sqrt{1-(\ln(x+1))^2}\right) = \infty \cdot 0$ ovvero $\lim_{x\to0^+} \dfrac{e^x - \sqrt{1-(\ln(x+1))^2}}{x^{-\alpha/2}} = \dfrac{0}{0}$. Per la regola di De l'Hospital si ha

$$\lim_{x\to0^+} \frac{e^x - \sqrt{1-(\ln(x+1))^2}}{x^{-\alpha/2}} = \lim_{x\to0^+} \frac{e^x + \dfrac{\ln(x+1)}{(x+1)\sqrt{1-(\ln(x+1))^2}}}{(-\alpha/2)\,x^{-\alpha/2-1}} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > -2 \\ 1 & \text{se } \alpha = -2 \\ +\infty & \text{se } \alpha < -2 \end{cases}.$$

Quindi $\lim_{x\to0^+} x^{\alpha/2}\left(e^x - \sqrt{1-(\ln(x+1))^2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > -2 \\ 1 & \text{se } \alpha = -2 \\ +\infty & \text{se } \alpha < -2 \end{cases}$.

3. Utilizzare le definizioni per stabilire la limitatezza o meno (superiore ed inferiore) di $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \,/\, x = \left(\dfrac{1}{\ln n + 1}\right)^{(-1)^n}, \forall n \in \mathbb{N} \right\}$ e, là dove limitato, per determinare il $\sup A$ e l'$\inf A$.

$A = B \cup C$, con $B = \left\{ x \in \mathbb{R} \,/\, x = \dfrac{1}{\ln(2n)+1}, \forall n \in \mathbb{N} \right\}$ e $C = \left\{ x \in \mathbb{R} \,/\, x = \ln(2n-1)+1, \forall n \in \mathbb{N} \right\}$.

Gli elementi di *B* sono tutti strettamente minori degli elementi di *C*. Quest'ultimo è illimitato

superiormente, infatti $\forall \mathrm{M} > 0, \exists n \in \mathbb{N} / \ln(2n-1)+1 > \mathrm{M}$; basta prendere tutti gli $n > \dfrac{e^{\mathrm{M}-1}+1}{2}$.
Poiché tutti gli elementi di B sono positivi esso è limitato inferiormente da 0 che è anche il suo estremo inferiore, infatti $\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N} / \dfrac{1}{\ln(2n)+1} < \varepsilon$; basta prendere tutti gli $n > \dfrac{e^{1/\varepsilon-1}}{2}$.
Quindi A è illimitato superiormente e $\inf A = 0$.

4. Dimostrare che, $\forall n \in \mathbb{N}$, la somma dei primi n numeri dispari è uguale a n^2.
Per $n=1$ la proprietà è verificata. Sia verificata per un particolare $\overline{n} \in \mathbb{N}$ cioè $\sum_{k=1}^{\overline{n}}(2k-1)=\overline{n}^2$, si dimostra anche che $\sum_{k=1}^{\overline{n}+1}(2k-1)=(\overline{n}+1)^2$. Infatti

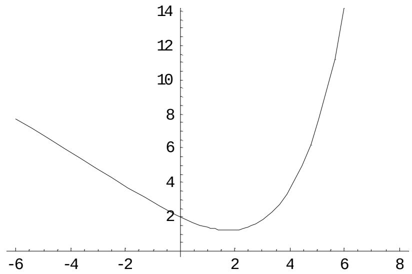
$$\sum_{k=1}^{\overline{n}+1}(2k-1)=\sum_{k=1}^{\overline{n}}(2k-1)+(2\overline{n}+1)=\overline{n}^2+2\overline{n}+1=(\overline{n}+1)^2.$$

SOL. PROVA INTERMEDIA DI ANALISI MATEMATICA (B2)
Collegio Didattico di Ingegneria Informatica - 22 dicembre 2010

1. Tracciare il grafico della funzione $f(x)=\sqrt{e^x+3}-x$. (*Sugg.*: $f(x)\neq 0 \quad \forall x\in D_f$).

$D_f=\mathbb{R}$. f è derivabile in D_f. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\infty-\infty$;

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{\dfrac{e^x+3}{x^2}}-1\right)=+\infty$ perché applicando due volte la regola di de l'Hospital si ottiene $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+3}{x^2}=+\infty$. Dal suggerimento segue che $f(x)>0$ in D_f. $f'(x)=\dfrac{e^x}{2\sqrt{e^x+3}}-1$; $f'(x)<0$ in $(-\infty,\ln 6)$, $f'(x)>0$ in $(\ln 6,+\infty)$ e $f'(x)=0$ in $x=\ln 6$. Quindi f è strett. decrescente in $(-\infty,\ln 6)$, strett. crescente in $(\ln 6,+\infty)$, $x=\ln 6$ è punto di minimo assoluto, $f(\ln 6)\approx 1.8$. $f''(x)=\dfrac{e^{2x}+6e^x}{4\left(e^x+3\right)\sqrt{e^x+3}}$; $f''(x)>0$ in D_f. Quindi f è convessa in D_f.



2. Calcolare, al variare del parametro reale α, il limite $\lim\limits_{x\to0^+} x^{\alpha/3}\left(3^x-\sqrt{1-\left(\ln(x+1)\right)^2}\right)$.

$\lim\limits_{x\to0^+} x^{\alpha/3}\left(3^x-\sqrt{1-\left(\ln(x+1)\right)^2}\right)=0$ se $\alpha\geq 0$. Sia $\alpha<0$. Allora si ha

$\lim\limits_{x\to0^+} x^{\alpha/3}\left(3^x-\sqrt{1-\left(\ln(x+1)\right)^2}\right)=\infty\cdot 0$ ovvero $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{3^x-\sqrt{1-\left(\ln(x+1)\right)^2}}{x^{-\alpha/3}}=\dfrac{0}{0}$. Per la regola di De l'Hospital si ha

$$\lim_{x\to0^+}\frac{3^x-\sqrt{1-\left(\ln(x+1)\right)^2}}{x^{-\alpha/3}}=\lim_{x\to0^+}\frac{3^x(\ln 3)+\dfrac{\ln(x+1)}{(x+1)\sqrt{1-\left(\ln(x+1)\right)^2}}}{(-\alpha/3)\,x^{-\alpha/3-1}}=\begin{cases}0 & \text{se } \alpha>-3\\ \ln 3 & \text{se } \alpha=-3\\ +\infty & \text{se } \alpha<-3\end{cases}.$$

Quindi $\lim\limits_{x\to0^+} x^{\alpha/3}\left(3^x-\sqrt{1-\left(\ln(x+1)\right)^2}\right)=\begin{cases}0 & \text{se } \alpha>-3\\ \ln 3 & \text{se } \alpha=-3\\ +\infty & \text{se } \alpha<-3\end{cases}$.

3. Utilizzare le definizioni per stabilire la limitatezza o meno (superiore ed inferiore) di $A=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x=(\ln n+2)^{(-1)^n},\forall n\in\mathbb{N}\right\}$ e, là dove limitato, per determinare il $\sup A$ e l'$\inf A$.

$A=B\cup C$, con $B=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x=\dfrac{1}{\ln(2n-1)+2},\forall n\in\mathbb{N}\right\}$ e $C=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x=\ln(2n)+2,\forall n\in\mathbb{N}\right\}$.

Gli elementi di *B* sono tutti strettamente minori degli elementi di *C*. Quest'ultimo è illimitato

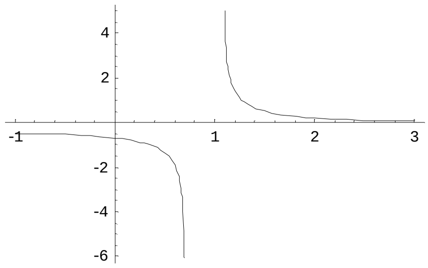
superiormente, infatti $\forall \mathrm{M} > 0, \exists n \in \mathbb{N} / \ln(2n) + 2 > \mathrm{M}$; basta prendere tutti gli $n > \frac{e^{\mathrm{M}-2}}{2}$.
Poiché tutti gli elementi di B sono positivi esso è limitato inferiormente da 0 che è anche il suo estremo inferiore, infatti $\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N} / \frac{1}{\ln(2n-1)+2} < \varepsilon$; basta prendere tutti gli $n > \frac{e^{1/\varepsilon-2}+1}{2}$.

4. Dimostrare che, $\forall n \in \mathbb{N}$, la somma di n con n^2 è un numero pari.
Per $n = 1$ la proprietà è verificata. Sia verificata per un particolare $\overline{n} \in \mathbb{N}$ cioè $\overline{n} + \overline{n}^2 = 2k$, si dimostra anche che $(\overline{n}+1) + (\overline{n}+1)^2 = 2h$. Infatti
$(\overline{n}+1) + (\overline{n}+1)^2 = \overline{n} + 1 + \overline{n}^2 + 2\overline{n} + 1 = \overline{n} + \overline{n}^2 + 2(\overline{n}+1) = 2(k + \overline{n} + 1) = 2h$.

SOL. PROVA INTERMEDIA DI ANALISI MATEMATICA (C1)
Collegio Didattico di Ingegneria Informatica - 22 dicembre 2010

1. Tracciare il grafico della funzione $f(x)=\ln\left(\dfrac{e^x-2}{e^x-3}\right)$.

$D_f=(-\infty,\ln 2)\cup(\ln 3,+\infty)$. $f(0)=\ln(1/2)\approx -0.7$. $f(x)>0$ in $(\ln 3,+\infty)$, $f(x)<0$ in $(-\infty,\ln 2)$. f è derivabile in D_f. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\ln(2/3)\approx -0.4$. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$. $\lim\limits_{x\to(\ln 2)^-} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to(\ln 3)^+} f(x)=+\infty$. $f'(x)=-\dfrac{e^x}{(e^x-2)(e^x-3)}$. $f'(x)<0$ in D_f. Quindi f è strett. decrescente in $(-\infty,\ln 2)$ e in $(\ln 3,+\infty)$. $f''(x)=\dfrac{(e^{2x}-6)e^x}{\left[(e^x-2)(e^x-3)\right]^2}$; $f''(x)<0$ in $(-\infty,\ln 2)$, $f''(x)>0$ in $(\ln 3,+\infty)$. Quindi f è concava in $(-\infty,\ln 2)$ e convessa in $(\ln 3,+\infty)$.



2. Calcolare, al variare del parametro reale α, il limite $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\alpha-7}\left(1+\sin\left(\dfrac{8}{x}\right)-\cos\sqrt{\dfrac{2}{x}}\right)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\alpha-7}\left(1+\sin\left(\dfrac{8}{x}\right)-\cos\sqrt{\dfrac{2}{x}}\right)=0$ se $\alpha\le 7$. Sia $\alpha>7$. Allora, ponendo $t<\dfrac{1}{x}$, si ha

$\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{\left(1+\sin(8t)-\cos\sqrt{2t}\right)}{t^{\alpha-7}}=\dfrac{0}{0}$. Per la regola di De l'Hospital si ha

$$\lim_{t\to0^+}\frac{1+\sin(8t)-\cos\sqrt{2t}}{t^{\alpha-7}}=\lim_{t\to0^+}\frac{8\cos(8t)+\dfrac{\sin\sqrt{2t}}{\sqrt{2t}}}{(\alpha-7)\,x^{\alpha-8}}=\begin{cases}0 & \text{se } \alpha<8\\ 9 & \text{se } \alpha=8\\ +\infty & \text{se } \alpha>8\end{cases}.$$

Quindi $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\alpha-7}\left(1+\sin\left(\dfrac{8}{x}\right)-\cos\sqrt{\dfrac{2}{x}}\right)=\begin{cases}0 & \text{se } \alpha<8\\ 9 & \text{se } \alpha=8\\ +\infty & \text{se } \alpha>8\end{cases}$.

3. Utilizzare le definizioni per stabilire la limitatezza o meno (superiore ed inferiore) di $A=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x=\left(\dfrac{1}{2^n+1}\right)^{(-1)^n},\forall n\in\mathbb{N}\right\}$ e, là dove limitato, per determinare il $\sup A$ e l'$\inf A$.

$A=B\cup C$, con $B=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x=\dfrac{1}{2^{2n}+1},\forall n\in\mathbb{N}\right\}$ e $C=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x=2^{2n-1}+1,\forall n\in\mathbb{N}\right\}$. Gli elementi di B sono tutti strettamente minori degli elementi di C. Quest'ultimo è illimitato superiormente, infatti $\forall \mathrm{M}>0,\exists n\in\mathbb{N}\,/\,2^{2n-1}+1>\mathrm{M}$; basta prendere tutti gli

$n > \dfrac{\log_2(\mathrm{M}-1)+1}{2}$. Poiché tutti gli elementi di B sono positivi esso è limitato inferiormente da 0 che è anche il suo estremo inferiore, infatti $\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N} / \dfrac{1}{2^{2n}+1} < \varepsilon$; basta prendere tutti gli $n > \dfrac{\log_2(1/\varepsilon - 1)}{2}$. Quindi A è illimitato superiormente e $\inf A = 0$.

4. Dimostrare che, $\forall n \in \mathbb{N}$, la somma dei quadrati dei primi n numeri naturali è $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Per $n=1$ la proprietà è verificata. Sia verificata per un particolare $\overline{n} \in \mathbb{N}$ cioè $\sum_{k=1}^{\overline{n}} k^2 = \dfrac{\overline{n}(\overline{n}+1)(2\overline{n}+1)}{6}$, si dimostra anche che $\sum_{k=1}^{\overline{n}+1} k^2 = \dfrac{(\overline{n}+1)(\overline{n}+2)(2\overline{n}+3)}{6}$. Infatti

$$\sum_{k=1}^{\overline{n}+1} k^2 = \sum_{k=1}^{\overline{n}} k^2 + (\overline{n}+1)^2 = \frac{\overline{n}(\overline{n}+1)(2\overline{n}+1)}{6} + (\overline{n}+1)^2 = (\overline{n}+1)\frac{\overline{n}(2\overline{n}+1)+6(\overline{n}+1)}{6} = (\overline{n}+1)\frac{2\overline{n}^2+7\overline{n}+6}{6}$$

$$(\overline{n}+1)\frac{(2\overline{n}+3)(\overline{n}+2)}{6}.$$

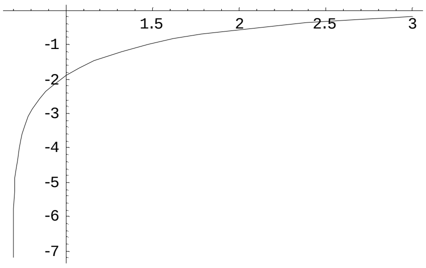
SOL. PROVA INTERMEDIA DI ANALISI MATEMATICA (C2)
Collegio Didattico di Ingegneria Informatica - 22 dicembre 2010

1. Tracciare il grafico della funzione $f(x)=\ln\left(\dfrac{e^x-2}{e^x+2}\right)$.

$D_f=(\ln 2,+\infty)$. $f(x)<0$ D_f. f è derivabile in D_f. $\lim\limits_{x\to(\ln 2)^+} f(x)=-\infty$. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

$f'(x)=\dfrac{4e^x}{e^{2x}-4}$. $f'(x)>0$ in D_f. Quindi f è strett. crescente in D_f. $f''(x)=\dfrac{-4e^x\left(e^{2x}+4\right)}{\left(e^{2x}-4\right)^2}$;

$f''(x)<0$ in D_f. Quindi f è concava in D_f.



2. Calcolare, al variare del parametro reale α, il limite $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\alpha-5}\left(1+\sin\left(\dfrac{7}{x}\right)-\cos\sqrt{\dfrac{6}{x}}\right)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\alpha-5}\left(1+\sin\left(\dfrac{7}{x}\right)-\cos\sqrt{\dfrac{6}{x}}\right)=0$ se $\alpha\le 5$. Sia $\alpha>5$. Allora, ponendo $t<\dfrac{1}{x}$, si ha

$\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{\left(1+\sin(7t)-\cos\sqrt{6t}\right)}{t^{\alpha-5}}=\dfrac{0}{0}$. Per la regola di De l'Hospital si ha

$$\lim_{t\to0^+}\frac{1+\sin(7t)-\cos\sqrt{6t}}{t^{\alpha-5}}=\lim_{t\to0^+}\frac{7\cos(7t)+3\dfrac{\sin\sqrt{6t}}{\sqrt{6t}}}{(\alpha-5)x^{\alpha-6}}=\begin{cases}0 & \text{se } \alpha<6\\ 10 & \text{se } \alpha=6\\ +\infty & \text{se } \alpha>6\end{cases}.$$

Quindi $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\alpha-5}\left(1+\sin\left(\dfrac{7}{x}\right)-\cos\sqrt{\dfrac{6}{x}}\right)=\begin{cases}0 & \text{se } \alpha<6\\ 10 & \text{se } \alpha=6\\ +\infty & \text{se } \alpha>6\end{cases}.$

3. Utilizzare le definizioni per stabilire la limitatezza o meno (superiore ed inferiore) di $A=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x=\left(3^n+2\right)^{(-1)^n},\forall n\in\mathbb{N}\right\}$ e, là dove limitato, per determinare il $\sup A$ e l'$\inf A$.

$A=B\cup C$, con $B=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x=\dfrac{1}{3^{2n-1}+2},\forall n\in\mathbb{N}\right\}$ e $C=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x=3^{2n}+2,\forall n\in\mathbb{N}\right\}$. Gli elementi di B sono tutti strettamente minori degli elementi di C. Quest'ultimo è illimitato superiormente, infatti $\forall \mathrm{M}>0,\exists n\in\mathbb{N}\,/\,3^{2n}+2>\mathrm{M}$; basta prendere tutti gli $n>\dfrac{\log_3(\mathrm{M}-2)}{2}$.
Poiché tutti gli elementi di B sono positivi esso è limitato inferiormente da 0 che è anche il suo estremo inferiore, infatti $\forall\varepsilon>0,\exists n\in\mathbb{N}\,/\,\dfrac{1}{3^{2n-1}+2}<\varepsilon$; basta prendere tutti gli $n>\dfrac{\log_3(1/\varepsilon-2)+1}{2}$. Quindi A è illimitato superiormente e $\inf A=0$.

4. Dimostrare che, $\forall n \in \mathbb{N}$, la somma dei cubi dei primi n numeri naturali è $\frac{\left[n(n+1)\right]^2}{4}$.

Per $n=1$ la proprietà è verificata. Sia verificata per un particolare $\bar{n} \in \mathbb{N}$ cioè $\sum_{k=1}^{\bar{n}} k^3 = \frac{\left[\bar{n}(\bar{n}+1)\right]^2}{4}$, si dimostra anche che $\sum_{k=1}^{\bar{n}+1} k^3 = \frac{\left[(\bar{n}+1)(\bar{n}+2)\right]^2}{4}$. Infatti

$$\sum_{k=1}^{\bar{n}+1} k^3 = \sum_{k=1}^{\bar{n}} k^3 + (\bar{n}+1)^3 = \frac{\left[\bar{n}(\bar{n}+1)\right]^2}{4} + (\bar{n}+1)^3 = (\bar{n}+1)^2 \frac{\bar{n}^2 + 4(\bar{n}+1)}{4} = (\bar{n}+1)^2 \frac{\bar{n}^2 + 4\bar{n} + 4}{4}$$

$$(\bar{n}+1)^2 \frac{(\bar{n}+2)^2}{4}.$$

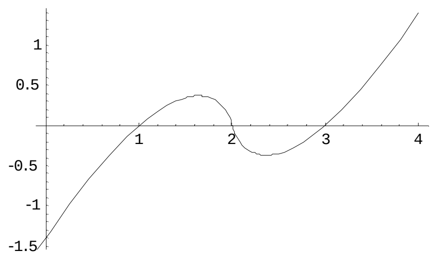
SOL. PROVA INTERMEDIA DI ANALISI MAT. E CALCOLO 1 (D1)
Collegio Didattico di Ingegneria Informatica - 22 dicembre 2010

1. Tracciare il grafico della funzione $f(x)=(x-2)\ln|x-2|$.

$D_f=\mathbb{R}-\{2\}$. $f(x)=\begin{cases}(x-2)\ln(x-2) & \text{se } x>2\\ (x-2)\ln(2-x) & \text{se } x<2\end{cases}$. $f(0)=-2\ln 2\approx -1.39$. $f(x)>0$ in $(1,2)\cup(3,+\infty)$, $f(x)<0$ in $(-\infty,1)\cup(2,3)$, $f(x)=0$ in $x=1$ e in $x=3$. f è derivabile in D_f. $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$. $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. $\lim_{x\to 2^-} f(x)=0\cdot\infty$, $\lim_{x\to 2^-}\frac{\ln(2-x)}{1/(x-2)}=\frac{\infty}{\infty}$, con la regola di De l'Hospital si ottiene $\lim_{x\to 2^-}\frac{\ln(2-x)}{1/(x-2)}=\lim_{x\to 2^-}(x-2)=0$. Analogamente si ottiene $\lim_{x\to 2^+} f(x)=0$.

$f'(x)=\begin{cases}\ln(x-2)+1 & \text{se } x>2\\ \ln(2-x)+1 & \text{se } x<2\end{cases}$. $f'(x)>0$ in $(-\infty,2-e^{-1})\cup(2+e^{-1},+\infty)$, $f'(x)<0$ in $(2-e^{-1},2)\cup(2,2+e^{-1})$, $f'(x)=0$ in $x=2-e^{-1}$ e in $x=2+e^{-1}$. Quindi *f* è strett. crescente in $(-\infty,2-e^{-1})$ e in $(2+e^{-1},+\infty)$; *f* è strett. decrescente in $(2-e^{-1},2)$ e in $(2,2+e^{-1})$; $x=2-e^{-1}$ è un punto di massimo relativo ($f(2-e^{-1})=1/e\approx 0.37$) e $x=2+e^{-1}$ è un punto di minimo relativo ($f(2+e^{-1})=-1/e\approx -0.37$).

$\forall x\in D_f$, $f''(x)=\frac{1}{x-2}$; $f''(x)<0$ in $(-\infty,2)$, $f''(x)>0$ in $(2,+\infty)$. Quindi *f* è concava in $(-\infty,2)$ e convessa in $(2,+\infty)$.



2. Calcolare, al variare del parametro reale α, il limite $\lim_{x\to 0^+} x^{\alpha-3}\left(1+\sin(7x)-\cos\sqrt{6x}\right)$.

$\lim_{x\to 0^+} x^{\alpha-3}\left(1+\sin(7x)-\cos\sqrt{6x}\right)=0$ se $\alpha\ge 3$. Sia $\alpha<3$. Allora

$\lim_{x\to 0^+} x^{\alpha-3}\left(1+\sin(7x)-\cos\sqrt{6x}\right)=\infty\cdot 0$, ovvero $\lim_{x\to 0^+}\frac{1+\sin(7x)-\cos\sqrt{6x}}{x^{3-\alpha}}=\frac{0}{0}$. Per la regola di De l'Hospital si ha $\lim_{x\to 0^+}\frac{1+\sin(7x)-\cos\sqrt{6x}}{x^{3-\alpha}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{7\cos(7x)+3\frac{\sin\sqrt{6x}}{\sqrt{6x}}}{(3-\alpha)x^{2-\alpha}}=\begin{cases}0 & \text{se } \alpha>2\\ 10 & \text{se } \alpha=2\\ +\infty & \text{se } \alpha<2\end{cases}$.

Quindi $\lim_{x\to 0^+} x^{\alpha-3}\left(1+\sin(7x)-\cos\sqrt{6x}\right)=\begin{cases}0 & \text{se } \alpha>2\\ 10 & \text{se } \alpha=2\\ +\infty & \text{se } \alpha<2\end{cases}$.

3. Utilizzare le definizioni per stabilire la limitatezza o meno (superiore ed inferiore) di $A=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x=\left(\frac{1}{\sqrt{n}+1}\right)^{(-1)^n},\forall n\in\mathbb{N}\right\}$ e, là dove limitato, per determinare il $\sup A$ e l' $\inf A$.

$A=B\cup C$, con $B=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x=\frac{1}{\sqrt{2n}+1},\forall n\in\mathbb{N}\right\}$ e $C=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x=\sqrt{2n-1}+1,\forall n\in\mathbb{N}\right\}$. Gli elementi di *B* sono tutti strettamente minori degli elementi di *C*. Quest'ultimo è illimitato superiormente, infatti $\forall \mathrm{M}>0,\exists n\in\mathbb{N}\,/\,\sqrt{2n-1}+1>\mathrm{M}$; basta prendere tutti gli $n>\frac{(\mathrm{M}-1)^2+1}{2}$. Poiché tutti gli elementi di *B* sono positivi esso è limitato inferiormente da 0 che è anche il suo estremo inferiore, infatti $\forall\varepsilon>0,\exists n\in\mathbb{N}\,/\,\frac{1}{\sqrt{2n}+1}<\varepsilon$; basta prendere tutti gli $n>\frac{(1/\varepsilon-1)^2}{2}$. Quindi *A* è illimitato superiormente e $\inf A=0$.

4. Dimostrare che, $\forall n\in\mathbb{N}$, la somma dei quadrati dei primi n numeri naturali è $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Per $n=1$ la proprietà è verificata. Sia verificata per un particolare $\overline{n}\in\mathbb{N}$ cioè $\sum_{k=1}^{\overline{n}}k^2=\frac{\overline{n}(\overline{n}+1)(2\overline{n}+1)}{6}$, si dimostra anche che $\sum_{k=1}^{\overline{n}+1}k^2=\frac{(\overline{n}+1)(\overline{n}+2)(2\overline{n}+3)}{6}$. Infatti

$$\sum_{k=1}^{\overline{n}+1}k^2=\sum_{k=1}^{\overline{n}}k^2+(\overline{n}+1)^2=\frac{\overline{n}(\overline{n}+1)(2\overline{n}+1)}{6}+(\overline{n}+1)^2=(\overline{n}+1)\frac{\overline{n}(2\overline{n}+1)+6(\overline{n}+1)}{6}=(\overline{n}+1)\frac{2\overline{n}^2+7\overline{n}+6}{6}$$

$$(\overline{n}+1)\frac{(2\overline{n}+3)(\overline{n}+2)}{6}.$$

SOL. PROVA INTERMEDIA DI ANALISI MAT. E CALCOLO 1 (D2)
Collegio Didattico di Ingegneria Informatica - 22 dicembre 2010

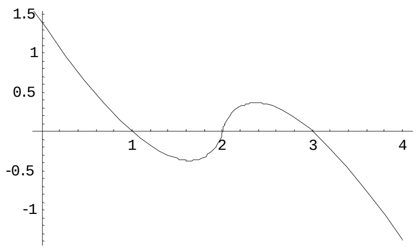
1. Tracciare il grafico della funzione $f(x)=(2-x)\ln|2-x|$.

$D_f=\mathbb{R}-\{2\}$. $f(x)=\begin{cases}(2-x)\ln(x-2) & \text{se } x>2\\ (2-x)\ln(2-x) & \text{se } x<2\end{cases}$. $f(0)=2\ln 2\approx 1.39$. $f(x)>0$ in $(-\infty,1)\cup(2,3)$, $f(x)<0$ in $(1,2)\cup(3,+\infty)$, $f(x)=0$ in $x=1$ e in $x=3$. f è derivabile in D_f.

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$. $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$. $\lim_{x\to 2^-} f(x)=0\cdot\infty$, $\lim_{x\to 2^-}\frac{\ln(2-x)}{1/(2-x)}=\frac{\infty}{\infty}$, con la regola di De l'Hospital si ottiene $\lim_{x\to 2^-}\frac{\ln(2-x)}{1/(2-x)}=\lim_{x\to 2^-}(2-x)=0$. Analogamente si ottiene $\lim_{x\to 2^+} f(x)=0$.

$f'(x)=\begin{cases}-\ln(x-2)-1 & \text{se } x>2\\ -\ln(2-x)-1 & \text{se } x<2\end{cases}$. $f'(x)>0$ in $(2-e^{-1},2)\cup(2,2+e^{-1})$, $f'(x)<0$ in $(-\infty,2-e^{-1})\cup(2+e^{-1},+\infty)$, $f'(x)=0$ in $x=2-e^{-1}$ e in $x=2+e^{-1}$. Quindi f è strett. crescente in $(2-e^{-1},2)$ e in $(2,2+e^{-1})$; f è strett. decrescente in $(-\infty,2-e^{-1})$ e in $(2+e^{-1},+\infty)$; $x=2-e^{-1}$ è un punto di minimo relativo ($f(2-e^{-1})=-1/e\approx-0.37$) e $x=2+e^{-1}$ è un punto di massimo relativo ($f(2+e^{-1})=1/e\approx 0.37$).

$\forall x\in D_f$, $f''(x)=-\frac{1}{x-2}$; $f''(x)>0$ in $(-\infty,2)$, $f''(x)<0$ in $(2,+\infty)$. Quindi f è convessa in $(-\infty,2)$ e concava in $(2,+\infty)$.



2. Calcolare, al variare del parametro reale α, il limite $\lim_{x\to 0^+} x^{\alpha-6}\left(1+\sin(4x)-\cos\sqrt{5x}\right)$.

$\lim_{x\to 0^+} x^{\alpha-6}\left(1+\sin(4x)-\cos\sqrt{5x}\right)=0$ se $\alpha\ge 6$. Sia $\alpha<6$. Allora $\lim_{x\to 0^+} x^{\alpha-6}\left(1+\sin(4x)-\cos\sqrt{5x}\right)=\infty\cdot 0$, ovvero $\lim_{x\to 0^+}\frac{1+\sin(4x)-\cos\sqrt{5x}}{x^{6-\alpha}}=\frac{0}{0}$. Per la regola di De l'Hospital si ha $\lim_{x\to 0^+}\frac{1+\sin(4x)-\cos\sqrt{5x}}{x^{6-\alpha}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{4\cos(4x)+5\frac{\sin\sqrt{5x}}{2\sqrt{5x}}}{(6-\alpha)x^{5-\alpha}}=\begin{cases}0 & \text{se } \alpha>5\\ 9/2 & \text{se } \alpha=5\\ +\infty & \text{se } \alpha<5\end{cases}$.

Quindi $\lim_{x\to 0^+}\frac{1+\sin(4x)-\cos\sqrt{5x}}{x^{6-\alpha}}=\begin{cases}0 & \text{se } \alpha>5\\ 9/2 & \text{se } \alpha=5\\ +\infty & \text{se } \alpha<5\end{cases}$.

3. Utilizzare le definizioni per stabilire la limitatezza o meno (superiore ed inferiore) di $A=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x=\left(\sqrt{n}+3\right)^{(-1)^n},\forall n\in\mathbb{N}\right\}$ e, là dove limitato, per determinare il $\sup A$ e l' $\inf A$.

$A=B\cup C$, con $B=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x=\dfrac{1}{\sqrt{2n-1}+3},\forall n\in\mathbb{N}\right\}$ e $C=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x=\sqrt{2n}+3,\forall n\in\mathbb{N}\right\}$. Gli elementi di B sono tutti strettamente minori degli elementi di C. Quest'ultimo è illimitato superiormente, infatti $\forall \mathrm{M}>0,\exists n\in\mathbb{N}\,/\sqrt{2n}+3>\mathrm{M}$; basta prendere tutti gli $n>\dfrac{(\mathrm{M}-3)^2}{2}$. Poiché tutti gli elementi di B sono positivi esso è limitato inferiormente da 0 che è anche il suo estremo inferiore, infatti $\forall\varepsilon>0,\exists n\in\mathbb{N}\,/\dfrac{1}{\sqrt{2n-1}+3}<\varepsilon$; basta prendere tutti gli $n>\dfrac{(1/\varepsilon-3)^2+1}{2}$. Quindi A è illimitato superiormente e $\inf A=0$.

4. Dimostrare che, $\forall n\in\mathbb{N}$, la somma dei cubi dei primi n numeri naturali è $\dfrac{\left[n(n+1)\right]^2}{4}$.

Per $n=1$ la proprietà è verificata. Sia verificata per un particolare $\bar{n}\in\mathbb{N}$ cioè $\sum_{k=1}^{\bar{n}}k^3=\dfrac{\left[\bar{n}(\bar{n}+1)\right]^2}{4}$, si dimostra anche che $\sum_{k=1}^{\bar{n}+1}k^3=\dfrac{\left[(\bar{n}+1)(\bar{n}+2)\right]^2}{4}$. Infatti

$$\sum_{k=1}^{\bar{n}+1}k^3=\sum_{k=1}^{\bar{n}}k^3+(\bar{n}+1)^3=\frac{\left[\bar{n}(\bar{n}+1)\right]^2}{4}+(\bar{n}+1)^3=(\bar{n}+1)^2\,\frac{\bar{n}^2+4(\bar{n}+1)}{4}=(\bar{n}+1)^2\,\frac{\bar{n}^2+4\bar{n}+4}{4}$$
$$(\bar{n}+1)^2\,\frac{(\bar{n}+2)^2}{4}.$$

SOLUZIONI DELLA PROVA INTERMEDIA DI CALCOLO 2 (D1)
Collegio Didattico di Ingegneria Informatica - 22 dicembre 2010

1. Calcolare il seguente limite $\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x^2}-(\cos x)^2}{x^2\sinh(x^2)}$.

Per $t\to 0$ si ha, $\cos t=1-\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{24}+o[t^4]$, $e^t=1+t+\frac{t^2}{2}+o[t^2]$, $\sinh t=t+o[t]$. Con le opportune sostituzioni si ha per $x\to 0$, $(\cos x)^2=\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o[x^4]\right)^2=1-x^2+\frac{1}{3}x^4+o[x^4]$, $e^{-x^2}=1-x^2+\frac{x^4}{2}+o[x^4]$, $\sinh(x^2)=x^2+o[x^2]$. Sostituendo si ottiene

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x^2}-(\cos x)^2}{x^2\sinh(x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}x^4+o[x^4]}{x^4+o[x^4]}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}+o[1]}{1+o[1]}=\frac{1}{6}.$$

2. Determinare le soluzioni nel campo complesso dell'equazione $2(z+\bar{z})-3\,\mathrm{Im}(z)=z^2-3|z|^2$.

Posto $z=x+iy$, l'equazione diventa $4x-3y=-2x^2-4y^2+2ixy$. Quindi si ottiene il sistema $\begin{cases}4x-3y=-2x^2-4y^2\\ xy=0\end{cases}$. Per $x=0$ si ha $-3y=-4y^2$ cha è soddisfatta per $y=0$, $y=3/4$. Per $y=0$ si ha $4x=-2x^2$ cha è soddisfatta per $x=0$, $x=-2$. Quindi le soluzioni dell'equazione sono $z_1=0$, $z_2=\frac{3}{4}i$, $z_3=-2$.

3. Determinare il carattere della seguente serie numerica $\sum_{k=1}^{\infty}\ln\left(k\sin\left(\frac{1}{k}\right)\right)^3$.

Dal criterio del confronto asintotico si ha $\lim_{k\to+\infty}k^\alpha\ln\left(k\sin\left(\frac{1}{k}\right)\right)^3=3\lim_{h\to 0^+}\frac{\ln\left(\frac{\sin(h)}{h}\right)}{h^\alpha}=\frac{0}{0}$ $(\alpha>0)$. Passando alla funzione associata e applicando 2 volte la regola di De l' Hospital si ha

$$3\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)}{x^\alpha}=3\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\alpha x^{\alpha-1}}\frac{x}{\sin x}\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=3\lim_{x\to 0^+}\frac{x\cos x-\sin x}{\alpha x^{\alpha+1}}=-3\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{\alpha(\alpha+1)x^{\alpha-1}}=-\frac{1}{2}$$

se $\alpha=2$. Allora la serie converge.

4. Calcolare il seguente integrale definito $\int_{-\pi}^{\pi/2}|x|\cos(|x|+x)\,dx$.

$$\int_{-\pi}^{\pi/2}|x|\cos(|x|+x)\,dx=\int_{-\pi}^{0}-x\cos(-x+x)\,dx+\int_{0}^{\pi/2}x\cos(x+x)\,dx=-\int_{-\pi}^{0}x\,dx+\int_{0}^{\pi/2}x\cos 2x\,dx=$$

$$-\frac{x^2}{2}\Big]_{-\pi}^{0}+\frac{1}{2}x\sin 2x\Big]_{0}^{\pi/2}-\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi/2}\sin 2x\,dx=\frac{\pi^2-1}{2}.$$

SOLUZIONI DELLA PROVA INTERMEDIA DI CALCOLO 2 (D2)
Collegio Didattico di Ingegneria Informatica - 22 dicembre 2010

1. Calcolare il seguente limite $\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x)^2 - e^{-x^2}}{2x^2\sinh\left(x^2\right)}$.

Per $t\to 0$ si ha, $\cos t = 1-\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{24}+o[t^4]$, $e^t = 1+t+\frac{t^2}{2}+o[t^2]$, $\sinh t = t+o[t]$. Con le opportune sostituzioni si ha per $x\to 0$, $(\cos x)^2 = \left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o[x^4]\right)^2 = 1-x^2+\frac{1}{3}x^4+o[x^4]$, $e^{-x^2} = 1-x^2+\frac{x^4}{2}+o[x^4]$, $\sinh\left(x^2\right) = x^2+o[x^2]$. Sostituendo si ottiene

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x)^2 - e^{-x^2}}{2x^2\sinh\left(x^2\right)} = -\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{12}x^4+o[x^4]}{x^4+o[x^4]} = -\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{12}+o[1]}{1+o[1]} = -\frac{1}{12}.$$

2. Determinare le soluzioni nel campo complesso dell'equazione $3\left(z+\overline{z}\right)+2\,\mathrm{Im}\left(z\right) = 2z^2+|z|^2$.

Posto $z = x+iy$, l'equazione diventa $6x+2y = 3x^2-y^2+2ixy$. Quindi si ottiene il sistema $\begin{cases}6x+2y = 3x^2-y^2\\ xy = 0\end{cases}$. Per $x=0$ si ha $2y=-y^2$ cha è soddisfatta per $y=0$, $y=-2$. Per $y=0$ si ha $6x=3x^2$ cha è soddisfatta per $x=0$, $x=2$. Quindi le soluzioni dell'equazione sono $z_1=0$, $z_2=-2i$, $z_3=2$.

3. Determinare il carattere della seguente serie numerica $\sum_{k=1}^{\infty}\ln\left(k\sin\left(\frac{1}{k}\right)\right)^5$.

Dal criterio del confronto asintotico si ha $\lim_{k\to+\infty}k^{\alpha}\ln\left(k\sin\left(\frac{1}{k}\right)\right)^5 = 5\lim_{h\to 0^+}\frac{\ln\left(\frac{\sin\left(h\right)}{h}\right)}{h^{\alpha}} = \frac{0}{0}$ $\left(\alpha>0\right)$. Passando alla funzione associata e applicando 2 volte la regola di De l' Hospital si ha

$$5\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)}{x^{\alpha}} = 5\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\alpha x^{\alpha-1}}\frac{x}{\sin x}\frac{x\cos x-\sin x}{x^2} = 5\lim_{x\to 0^+}\frac{x\cos x-\sin x}{\alpha x^{\alpha+1}} = -5\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{\alpha\left(\alpha+1\right)x^{\alpha-1}} = -\frac{5}{6}$$

se $\alpha = 2$. Allora la serie converge.

4. Calcolare il seguente integrale definito $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}|x|\cos\left(|x|-x\right)dx$.

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}|x|\cos\left(|x|-x\right)dx = \int_{-\pi/2}^{0}-x\cos\left(-x-x\right)dx+\int_{0}^{\pi/2}x\cos\left(x-x\right)dx = -\int_{-\pi/2}^{0}x\cos 2x\,dx+\int_{0}^{\pi/2}x\,dx =$$

$$-\frac{1}{2}x\sin 2x\Big]_{-\pi/2}^{0}+\frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{0}\sin 2x\,dx+\frac{x^2}{2}\Big]_{0}^{\pi/2} = \frac{\pi^2-4}{8}.$$