1. Sia $f(x)=\begin{cases} e^{-\sqrt{x-1}} & \text{se } x \geq 1 \\ \alpha+\operatorname{arctg} x & \text{se } x<1 \end{cases}$. Stabilire per quali valori del parametro reale α la funzione è invertibile nel rispettivo dominio. Determinare, inoltre, il valore di α affinché f risulti continua in 1, e stabilire se, per tale valore di α, f risulta anche derivabile in 1.

$D=\mathbb{R}$. $f(1)=1$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\alpha-\frac{\pi}{2}$, $\lim_{x\to 1^-} f(x)=\alpha+\frac{\pi}{4}$. f è derivabile $\forall x \in D-\{1\}$ e si ha

$$f'(x)=\begin{cases} -\dfrac{e^{-\sqrt{x-1}}}{2\sqrt{x-1}} & \text{se } x>1 \\ \dfrac{1}{1+x^2} & \text{se } x<1 \end{cases}$$

per cui risulta strettamente crescente in $(-\infty,1)$ e strettamente decrescente in $[1,+\infty)$, (si noti che f è continua a dx in 1). Affinché f risulti iniettiva in D dovrà eseere necessariamente $\alpha-\frac{\pi}{2}\geq 1$ oppure $\alpha+\frac{\pi}{4}\leq 0$. Quindi f risulta invertibile in D se $\alpha \geq 1+\frac{\pi}{2}$ oppure se $\alpha \leq -\frac{\pi}{4}$. f risulta continua in 1 se $\lim_{x\to 1^-} f(x)=\alpha+\frac{\pi}{4}=f(1)=1$ cioè se $\alpha=1-\frac{\pi}{4}$. Infine, poiché $\lim_{x\to 1^+} f'(x)=-\infty$, f non è derivabile in 1.

2. Determinare il numero delle radici dell'equazione $5x^6-18x^5-30x^4+15=0$.

Sia $f(x)=5x^6-18x^5-30x^4+15$. Allora $f'(x)=30x^5-90x^4-120x^3=30x^3\left(x^2-3x-4\right)$. Tale derivata si annulla nei punti -1, 0 e 4 che sono rispettivamente punti di minimo, massimo e minimo relativo per *f*. Poiché $f(-1)>0, f(0)>0, f(4)<0$ e poiché $\lim_{x\to\infty} f(x)=+\infty$, la funzione si annulla esattamente 2 volte. Quindi l'equazione ammette due zeri reali.

3. Determinare, utilizzando la definizione, i punti di accumulazione del sottoinsieme $A=\left\{x \in \mathbb{R} / x=\frac{n}{n+2}, \forall n \in \mathbb{N}\right\}$.

Tra due elementi di A c'è sempre una certa distanza, quindi tutti gli elementi di A sono punti isolati di A. L'unico punto di accumulazione di A è 1. Infatti $\forall \delta>0\ \exists\, x \in A / x \in (1-\delta,1)$.

Per dimostrare questo occorre verificare che $\forall \delta>0\ \exists\, n \in \mathbb{N} / 1-\delta<\frac{n}{n+2}<1$. La seconda disequazione è sempre soddisfatta; la prima è soddisfatta per $n>\frac{2(1-\delta)}{\delta}$.

4. Siano $f(x)$ e $g(x)$ definite per $x > 0$ tali che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ e $g(x) \geq 0 \quad \forall x > 0$.

Applicando la definizione di funzione divergente, dimostrare che $\lim_{x\to+\infty} \left(g(x) + f(x)\right) = +\infty$.

Per Hp. Si ha che $\forall M > 0 \, \exists \, \delta_M > 0 / \forall x > \delta_M \Rightarrow f(x) > M$.
Poiché per Hp. Si ha che $\forall x > 0, g(x) \geq 0$, segue che $\forall x > \delta_M, f(x) + g(x) \geq f(x) > M$.
Quindi si ottiene la Th. cioè $\forall M > 0 \, \exists \, \delta_M > 0 / \forall x > \delta_M \Rightarrow f(x) + g(x) > M$.