SOLUZIONI

1. Determinare, nel piano di Gauss, tutti i numeri complessi z che soddisfano l'equazione $|z| = z^6$.
(Sugg: *sfruttare la rappresentazione trigonometrica dei numeri complessi*)

Posto $z = |z|\left(\cos\left(\operatorname{Arg} z\right) + i \sin\left(\operatorname{Arg} z\right)\right)$ l'equazione diventa

$$|z| = |z|^6 \left(\cos\left(6\operatorname{Arg} z\right) + i \sin\left(6\operatorname{Arg} z\right)\right).$$

Osservato che il numero $z = 0$ è una soluzione dell'equazione, questa equivale, per $z \neq 0$ alla seguente

$$1 = |z|^5 \left(\cos\left(6\operatorname{Arg} z\right) + i \sin\left(6\operatorname{Arg} z\right)\right)$$

cioè

$$\begin{cases} |z|^5 \cos\left(6\operatorname{Arg} z\right) = 1 \\ |z|^5 \sin\left(6\operatorname{Arg} z\right) = 0 \end{cases}.$$

Dalla seconda equazione si ha $\operatorname{Arg} z = \dfrac{k\pi}{6}, \quad k \in \mathbb{Z}$. Sostituendo tali valori nella prima equazione, segue che k deve essere necessariamente pari, cioè $k = 2h, \quad h \in \mathbb{Z}$, e inoltre

$$|z|^5 = 1 \Rightarrow |z| = 1.$$

Quindi i numeri complessi che soddisfano l'equazione sono, oltre lo 0, i seguenti sei

$$\cos\left(\frac{h\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{h\pi}{3}\right), \quad h = 0,1,2,3,4,5.$$

----

2. Risolvere la seguente equazione $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x+1}{x^2}\right)^{\frac{k}{2}} = 2$.

L'equazione si può scrivere in modo equivalente

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{x+1}}{|x|}\right)^k = 2, \quad x \geq -1, \ x \neq 0.$$

Affinché l'equazione abbia senso, la serie a primo membro deve convergere. Essendo questa una serie geometrica di ragione $\dfrac{\sqrt{x+1}}{|x|}$, essa converge quando $-1 < \dfrac{\sqrt{x+1}}{|x|} < 1$. La disequazione di sinistra è soddisfatta $\forall x \in [-1, +\infty) - \{0\}$. La disequazione di destra equivale, per $x \in [-1, +\infty) - \{0\}$, alla seguente

$$x^2 - x + 1 > 0.$$

Essa è sempre soddisfatta in $x \in [-1, +\infty) - \{0\}$. Quindi la serie geometrica converge $\forall x \in [-1, +\infty) - \{0\}$, ed ha come somma

$$\frac{1}{1-\frac{\sqrt{x+1}}{|x|}}=\frac{|x|}{|x|-\sqrt{x+1}}.$$

Di conseguenza l'equazione equivale alla seguente $\frac{|x|}{|x|-\sqrt{x+1}}=2$, dove $x\in[-1,+\infty)-\{0\}$. Le soluzioni sono $2\left(1-\sqrt{2}\right)\approx -0.8$ e $2\left(1+\sqrt{2}\right)\approx 4.8$. Poiché tali numeri sono contenuti in $[-1,+\infty)-\{0\}$ essi costituiscono le soluzioni dell'equazione iniziale.

----

3. Sia f una funzione dispari e continua nell'intervallo $[-a,a]$ $(a>0)$**.** Dimostrare che si ha $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=0$.

Si ha $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=\int_{-a}^{0} f(x)\,dx+\int_{0}^{a} f(x)\,dx$. Sostituendo $x=-t$ per il primo integrale a secondo membro si ha

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx=-\int_{a}^{0} f(-t)\,dt=\int_{0}^{a} f(-t)\,dt.$$

Inoltre essendo la funzione integranda dispari $f(-t)=-f(t)$ si ha $\int_{-a}^{0} f(x)\,dx=-\int_{0}^{a} f(t)\,dt$. Quindi

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=\int_{-a}^{0} f(x)\,dx+\int_{0}^{a} f(x)\,dx=-\int_{0}^{a} f(x)\,dx+\int_{0}^{a} f(x)\,dx=0.$$

----

4. Data la funzione $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^n-3y^m}{x^4+y^3} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$, con n e m interi positivi, determinare i valori di n e m per i quali f ammette entrambe le derivate parziali nell'origine.

Si ha $\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}h^{n-5}$ e $\lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=-3\lim_{k\to 0}k^{m-4}$. I due limiti esistono finiti per $n\geq 5$ e $m\geq 4$. Quindi, la funzione ammette nell'origine derivata parziale rispetto alla variabile x $\forall n\geq 5$, mentre ammette nell'origine derivata parziale rispetto alla variabile y $\forall m\geq 4$.