CAM - Complementi di Analisi Uno, a.a. 2003/04

Comm. Prof. Mario Girardi

Prova di Esame - 11 febbraio 2005 [Soluzioni]

ESERCIZIO 1

Calcolare le dimensioni (altezza e lunghezza) del rettangolo di area massima inscritto in una semicirconferenza di raggio 2.

Soluzione. L'area ha un valore massimo quando la lunghezza del rettangolo è $2\sqrt{2}$ e l'altezza è $\sqrt{2}$.

Per descrivere le dimensioni del rettangolo, collochiamo la circonferenza $\mathcal{C}$ e il rettangolo nel piano cartesiano, scegliendo come centro di $\mathcal{C}$ l'origine degli assi.

Indichiamo con x il vertice inferiore destro ed usiamo l'equazione di $\mathcal{C}: x^2 + y^2 = 4$.
Si ha:

- lunghezza: $2x$;
- altezza: $\sqrt{4 - x^2}$;
- area: $2x\sqrt{4 - x^2}$.

Pertanto, dobbiamo trovare il massimo assoluto della funzione $A(x) = 2x\sqrt{4 - x^2}$. nell'intervallo $0 \leq x \leq 2$.
Esaminiamo i valori di A nei punti critici e negli estremi del dominio.
La derivata è data da

$$A'(x) = \frac{-2x^2}{\sqrt{4 - x^2}} + 2\sqrt{4 - x^2}.$$

$A'(x)$ non e' definita quando $x = 2$ e si annulla per $x = \sqrt{2}$ e $x = -\sqrt{2}$. Nel nostro intervallo, $0 \leq x \leq 2$, si ha

- valori nei punti critici: $A(\sqrt{2}) = 4$ e $A(2) = 0$;
- valori negli estremi del dominio: $A(0) = 0$ e $A(2) = 0$.

Quindi, l'area ha un valore massimo 4 quando la lunghezza del rettangolo è $2\sqrt{2}$ e l'altezza è $\sqrt{2}$.

ESERCIZIO 2

Sia data la funzione $f(x) := x\log^2(x)$.

Determinarne insieme di definizione, parità e disparità, segno, limiti ed asintoti, intervalli di monotonia, intervalli di convessità, estremi relativi ed assoluti, flessi. Infine, disegnarne un grafico approssimativo.

Soluzione. Vd. Svolgimento e Figura 1.

Figura 1: $f(x) = xlog^2x$.

Svolgimento:

Dominio della funzione: $\mathrm{Dom}f = (0, +\infty)$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} xlog^2x = 0$; $\lim\limits_{x\to +\infty} xlog^2x = +\infty$. Non vi sono asintoti.

$$f'(x) = log^2x + x \cdot 2logx \cdot \frac{1}{x} = logx(logx+2) \begin{cases} > 0, \text{ se } x \in (0, e^{-2}) \cup (1, +\infty), \\ < 0, \text{ se } x \in (e^{-2}, 1). \end{cases}$$

La funzione ha un massimo in $x = e^{-2}$ ed un minimo in $x = 1$.

$$f''(x) = 2logx \cdot \frac{1}{x} + \frac{2}{x} = \frac{2}{x}(logx+1) \begin{cases} > 0, \text{ se } x > e^{-1} \\ < 0, \text{ se } 0 < x < e^{-1}. \end{cases}$$

Quindi la funzione è convessa per $x > e^{-1}$ (punto di flesso per f).

ESERCIZIO 3

A) Calcolare (se esiste) il seguente integrale improprio: $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$.

Soluzione. L'integrale esiste e vale $\dfrac{\pi}{4}$.

È sufficiente calcolare per ogni $b > 0$ l'integrale in $(0, b)$ e studiarne il comportamento asintotico per $b \to +\infty$.

Effettuiamo la sostituzione $t = e^x$; si ha:

$$\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{1}{t + \frac{1}{t}} \frac{1}{t} dt = \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \arctan t = \arctan e^x.$$

Allora

$$\lim_{b \to +\infty} \int_0^b \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \lim_{b \to +\infty} \left(\arctan e^b - \arctan e^0 \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

B) Studiare l'integrabilità in $(1, +\infty)$ della seguente funzione: $f(x) := \dfrac{\log(1+x)}{\sqrt{x^3}}$.

Soluzione. La funzione è integrabile.

Per la monotonia della funzione logaritmo, $\log(1 + x) \leq \log(2x)$, per $x \in (1, +\infty)$, allora, usando il *Criterio del Confronto*, otteniamo l'integrabilità di f dall'integrabilità della funzione $\dfrac{\log(2x)}{\sqrt{x^3}}$.

Infatti,

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log(1+x)}{\sqrt{x^3}} dx \leq \int_1^{+\infty} \frac{\log(2x)}{\sqrt{x^3}} dx = (\log 2) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3}} + \int_1^{+\infty} \frac{\log(x)}{\sqrt{x^3}} dx$$

ed entrambi gli integrali a secondo membro esistono e sono finiti.

Il primo si può calcolare, in senso generalizzato.

$$(\log 2) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3}} = \frac{(\log 2)}{2}.$$

Il secondo converge, ancora, per confronto[1]

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log(x)}{\sqrt{x^3}} dx \leq \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x^3}} dx = \int_1^{+\infty} x^{-\frac{5}{4}} dx = \frac{1}{4}.$$

ESERCIZIO 4

Calcolare il seguente integrale: $\displaystyle\int \frac{2x}{\sin^2(x) - \cos(x) + \cos^2(x) - 2} dx$.

---

[1] Nota. Avremmo potuto subito ricavare l'integrabilità di f osservando che, all'infinito, $f \approx \frac{\log(x)}{\sqrt{x^3}}$.

Soluzione. $-2x\tan\left(\frac{x}{2}\right)-4\ln\left(\left|\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right|\right)+c.$

Subito si vede che

$$\int\frac{2x}{\sin^2(x)-\cos(x)+\cos^2(x)-2}\,dx=-2\int\frac{x}{\cos x+1}\,dx.$$

Ora, verifichiamo che $\displaystyle\int\frac{1}{\cos x+1}\,dx=\tan\left(\frac{x}{2}\right).$
È sufficiente effettuare la sostituzione(²) $t=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$; si ha:

$$\int\frac{1}{\cos x+1}\,dx=\int\frac{2}{1+t^2}\frac{1}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\,dt=\int dt=\tan\left(\frac{x}{2}\right).$$

A questo punto, integrando per parti

$$-2\int\frac{x}{\cos x+1}\,dx=-2x\tan\left(\frac{x}{2}\right)+2\int\tan\left(\frac{x}{2}\right)\,dx=-2x\tan\left(\frac{x}{2}\right)-4\ln\left(\left|\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right|\right)+c.$$

ESERCIZIO 5

Dare un'approssimazione con un errore assoluto $\leq 10^{-3}$ del seguente integrale

$$\int_0^1\frac{\sin(x)}{x}\,dx.$$

Soluzione. $\dfrac{1703}{1800}\pm 10^{-3}.$

Si ha $\displaystyle\sin x=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$

Da cui, $\displaystyle\frac{\sin x}{x}=\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k+1)!}+R(x)$, con $\displaystyle|R(x)|\leq\frac{x^{2n+2}}{(2n+3)!}.$

Si può prendere l'integrale del polinomio se l'integrale del resto è $\leq 10^{-3}$. Ciò avviene se $n=2$; infatti:

$$\int_0^1\frac{x^{2n+2}}{(2n+3)!}dx=\frac{1}{(2n+3)!(2n+3)}\leq 10^{-3}\text{ se }n\geq 2.$$

Quindi

$$\int_0^1\frac{\sin x}{x}dx\approx\int_0^1\left(1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}\right)dx=1-\frac{1}{3!3}+\frac{1}{5!5}=\frac{1703}{1800}.$$

---

[2] Si può vedere anche direttamente usando $\cos x=\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$.