CAM - Complementi di Analisi Uno, a.a. 2003/04

Comm. Prof. Mario Girardi

Prova di Esonero del 3 giugno 2004 [Soluzioni]

ESERCIZIO 1

Calcolare il seguente limite utilizzando lo sviluppo di Taylor.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^3(e^x - \cos x)}$$

Si ha:

$$\begin{aligned} \sin^2 x &= x^2 - \frac{2}{3!}x^4 + o(x^4); \\ e^x &= 1 + x + o(x); \\ \cos x &= 1 + o(x). \end{aligned}$$

Da cui

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^3(e^x - \cos x)} &= \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - x^2 + \frac{2}{3!}x^4 + o(x^4)}{x^3(1 + x + o(x) - (1 + o(x)))} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{3}x^4 + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

ESERCIZIO 2

Dare un approssimazione con errore assoluto $\leq 10^{-3}$ del seguente integrale

$$\int_0^1 \cos(x^2)dx.$$

Soluzione. $\dfrac{977}{1080} \pm 10^{-3}$.

Si ha $\cos(x^2) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{4k}}{(2k)!} + R(x)$, con $|R(x)| \leq \frac{x^{4n+2}}{(2n+2)!}$.

Si può prendere l'integrale del polinomio se l'integrale del resto è $\leq 10^{-3}$. Ciò avviene se $n = 2$; infatti:

$$\int_0^1 \frac{x^{4n+2}}{(2n+2)!}dx = \frac{1}{(2n+2)!(4n+3)} \leq 10^{-3} \text{ se } n \geq 2.$$

Quindi

$$\int_0^1 \cos(x^2)dx \approx \int_0^1 \left(1 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^8}{24}\right) dx = 1 - \frac{1}{10} + \frac{1}{216} = \frac{977}{1080}.$$

ESERCIZIO 3

Discutere l'esistenza del seguente integrale improprio.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\alpha^2 x^2)}}, \quad (\alpha < 1).$$

Soluzione. L'integrale è convergente.

Osserviamo che la funzione integranda è divergente per $x \to 1^+$, pertanto occorre verificare che esiste finito il seguente limite

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\alpha^2 x^2)}}.$$

Per $x \approx 1$, la funzione integranda si comporta (a meno di una costante moltiplicativa non nulla) come la funzione $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$; si ha:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 1^-} \frac{\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-\alpha^2x^2)}}}{\frac{1}{\sqrt{1-x}}} &= \lim_{x \to 1^-} \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{(1+x)(1-x)(1-\alpha^2x^2)}} \\
&= \lim_{x \to 1^-} \frac{1}{\sqrt{(1+x)(1-\alpha^2x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{2(1-\alpha^2)}}.
\end{aligned}$$

Inoltre, utilizzando il cambio di variabile $t = 1-x$, si vede che la funzione $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ è integrabile in $[0,1]$; si ha:

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} < +\infty.$$

Allora, grazie al Criterio del confronto asintotico, anche la funzione di partenza è integrabile.

ESERCIZIO 4

Discutere l'integrabilità in segno e in valore assoluto della funzione $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ nell'intervallo $(\pi, +\infty)$:

A) $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$; **B)** $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,dx$.

Soluzione. La funzione f è integrabile in $[\pi, +\infty)$ in senso improprio, ma non in valore assoluto.

(A) Verifichiamo che la funzione $\dfrac{\sin x}{x}$ è integrabile in $[\pi, +\infty)$, ossia che esiste finito il seguente limite

$$\lim_{b \to +\infty} \int_\pi^b \frac{\sin x}{x} dx$$

Integrando per parti, si ha, per ogni $b > \pi$:

$$\int_{\pi}^{b} \frac{\sin x}{x} dx = -\frac{\cos b}{b} - \frac{1}{\pi} - \int_{\pi}^{b} \frac{\cos x}{x^2} dx$$

e l'integrale a secondo membro esiste, poiché la funzione $\frac{\cos x}{x^2}$ è assolutamente integrabile in $[\pi, +\infty)$; infatti:

$$\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

In definitiva,

$$\lim_{b \to +\infty} \int_{\pi}^{b} \frac{\sin x}{x} dx = -\frac{1}{\pi} - \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx.$$

(B) Consideriamo l'integrale della funzione $\frac{|\sin x|}{x}$ in $[k\pi, (k+1)\pi]$, per ogni $k \in \mathbb{N}$. Possiamo sfruttare la monotonia di $\frac{1}{x}$ e stimare dal basso.

$$\begin{aligned}
\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx &\geq \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin x| dx \\
&= \frac{(-1)^k}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \sin x dx \\
&= \frac{(-1)^k}{(k+1)\pi} (\cos(k\pi) - \cos((k+1)\pi) = \frac{2}{(k+1)\pi}.
\end{aligned}$$

Sommando su k, si ha

$$\int_{\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx \geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}.$$

Poiché la serie armonica è divergente, ne segue che il limite è divergente, quindi la funzione data non è integrabile in $(\pi, +\infty)$.

ESERCIZIO 5

A) Enunciare il "Primo Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale".

Teorema 1. *Siano f una funzione localmente integrabile in un intervallo I e x_0 un punto interno ad I; indichiamo con F la funzione integrale $F(x) := \int_{x_0}^{x} f(t) dt$ $(\forall x \in I)$.*
Se $f(x_0+)$ esiste, allora esiste $F'_+(x_0)$ e si ha $F'_+(x_0) = f(x_0+)$,
analogamente, se $f(x_0-)$ esiste, allora esiste $F'_-(x_0)$ e si ha $F'_-(x_0) = f(x_0-)$,

dove $f(x_0\pm) := \lim_{x \to x_0^{\pm}} f(x)$ e $F'_{\pm}(x_0) := \lim_{x \to x_0^{\pm}} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0}$.

B) Dimostrare la seguente proposizione: *Siano* I *un intervallo della retta reale,* $n \in \mathbb{N}$ e f *una funzione reale derivabile* $n+1$ *volte con derivate continue in* I*, allora* $\forall x_0, x \in I$ *si ha*

$$f(x) = \mathbb{T}^n_{x_0} f(x) + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt, \tag{1}$$

dove $\mathbb{T}^n_{x_0} f(x)$ è *il polinomio di Taylor di grado* n *per* f *in* x_0*.*
[Suggerimento: Dimostrare per induzione su n]

Dimostrazione Se $n = 0$ la tesi è data dal Secondo Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale. Supponiamo che la tesi valga per $n > 0$ (ipotesi induttiva) e dimostriamo che vale per $n+1$. Quindi sia f una funzione di classe $C^{n+2}(I)$.
Scriviamo l'uguaglianza (1) in tale modo:

$$f(x) = \mathbb{T}^n_{x_0} f(x) + \frac{1}{(n+1)!} \int_{x_0}^{x} \frac{d}{dt}(x-t)^{n+1} f^{(n+1)}(t)\, dt$$

ed integriamo per parti; si ottiene

$$f(x) = f(x) = \mathbb{T}^n_{x_0} f(x) - \frac{1}{(n+1)!} \Big((x-t)^{n+1} f^{(n+1)}(t) \Big) + \frac{1}{(n+1)!} \int_{x_0}^{x} (x-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t)\, dt,$$

cioè la (1) con $n+1$ al posto di n.