

Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2008/2009
AL1 - Algebra 1: Fondamenti
Prof. F. Pappalardi
Tutorato 6 - 20 Novembre 2008
Elisa Di Gloria, Luca Dell'Anna
www.matematica3.com

Esercizio 1.

Siano $z, w \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, mostrare che

- $|\bar{z}| = |z|$;
- $\frac{1}{i} = -i$;
- $|z^n| = |z|^n$;
- $|\bar{z}^n| = |z|^n$;
- $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$;
- $\overline{\bar{z}} = z$;
- $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$;
- $z = \bar{z} \iff z \in \mathbb{R}$;
- $\arg \bar{z} = -\arg z$;
- $\arg z^n = n \arg z$;
- $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$;
- $z \cdot \bar{z} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Esercizio 2.

Calcolare norma, modulo e argomento dei seguenti numeri complessi

- i ;
- $1 - i$;
- $\frac{i}{2}$;
- $\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$;
- $1 + i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5$;
- $(1 + i)^2$;

- $(1+i)(1-i)$;
- $e^{i\theta}$ con $\theta \in \mathbb{R}$;
- $2-3i$.

Esercizio 3.

Svolgere i seguenti calcoli, calcolare poi inverso e scrittura in forma trigonometrica del risultato

- $(2+i)(4+2i)+4i$;
- $(1+i)^2$;
- $-i(\frac{1}{2}+\frac{3i}{2})$;
- $(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2})^{3600}$.

Esercizio 4.

Esprimere in forma trigonometrica i seguenti numeri complessi: 5 , $-1+3i$, -6 , $-3+i\sqrt{3}$, $\frac{1}{2i}$, $\frac{-1}{1+2i}$.

Esercizio 5.

Calcolare:

- $(1-2i)(2+3i)^{-1}$;
- $(i)^{49}$, $(-i)^{58}$;
- $\frac{(21-3i)+(5-6i)}{(1+i)-(8i+3)}$;
- $(\frac{\sqrt{3}i}{2}+\frac{2i}{6})$.

Esercizio 6.

Dimostrare che la somma tra numeri complessi definita come:

$$(a+ib)+(c+id):=(a+c)+i(b+d)$$

è ben definita, commutativa e associativa. Verificare inoltre la proprietà distributiva rispetto al prodotto.

Di quali proprietà gode il prodotto? Ricordiamo la definizione di prodotto tra numeri complessi,

$$(a+ib)(c+id):=(ac-bd)+i(ad+bc).$$