COGNOME .... *NOME* .... *MATRICOLA* ....

Risolvere il massimo numero di esercizi accompagnando le risposte con spiegazioni chiare ed essenziali. *Inserire le risposte negli spazi predisposti. NON SI ACCETTANO RISPOSTE SCRITTE SU ALTRI FOGLI.* 1 Esercizio = 4 punti. Tempo previsto: 2 ore. Nessuna domanda durante la prima ora e durante gli ultimi 20 minuti.

FIRMA	1	2	3	4	5	6	7	8	TOT.
....									

1. Rispondere alle sequenti domande fornendo una giustificazione di una riga:

   a. È vero che se A è un anello commutativo e $I \subset A$ è un ideale, allora A/I è un anello commutativo?

   ....

   b. E' vero che se G è un gruppo abeliano finito e n divide $|G|$, allora G contiene un elemento di ordine n?

   ....

   c. É vero che se F è un campo, allora $F[X, Y]$ è un anello a ideali principali?

   ....

   d. É vero che esiste un campo con 81 elementi.

   ....

2. Dopo aver fornito la definizione di gruppo ciclico, si dimostri che un gruppo ciclico con n elementi contiene esattamente $\varphi(n)$ generatori (Qui φ indica la funzione di Eulero).

3. Dimostrare che se G_1, G_2 e G_3 sono gruppi tali che $G_1 \leq G_2 \leq G_3$ e G_1 è normale in G_3, allora G_1 è normale in G_2. Fornire un esempio non banale in cui non vale il viceversa (cioè un esempio di gruppi non banali tali che G_1 è normale in G_2 ma G_1 non è normale in G_3).

4. Determinare tutti i sottogruppi di $S_3 \times \mathbf{Z}_2$ e per ciascuno stabilire se è o meno normale.

5. Dopo aver definito la nozione di anello a ideali principali, dimostrare che se $\psi : A \to B$ è un omomorfismo suriettivo di anelli e A è a ideali principali, allora anche B è a ideali principali.

6. Sia A un anello e I un ideale. Dimostrare che $\tilde{I} = \{a \in A \text{ tali che } \exists n \in \mathbf{N}, a^n \in I\}$ è un ideale contenente I. Determinare $\tilde{I}$ nel caso in cui $A = \mathbf{Z}$ e $I = 16\mathbf{Z}$.

7. Sia $A = \mathbf{Z}[X]$ e sia S l'insieme dei polinomi f di A della forma $f(X) = a_0 + a_1X^5 + a_2X^{10} + \cdots a_mX^{5m}$. Dimostrare che S è un sottoanello di A e stabilire se è un ideale.

8. Determinare tutti i divisori dello zero dell'anello $(\mathbf{Z}/5\mathbf{Z})[X]/(x^2 - 1)$.