Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2009/2010
AL2 - Algebra 2: Gruppi, Anelli e Campi
Prof. F. Pappalardi
Tutorato 4 - 28 Ottobre 2009
Matteo Acclavio, Luca Dell'Anna
www.matematica3.com

Esercizio 1.

- Determinare gli elementi del gruppo degli automorfismi del gruppo dei quaternioni
- Determinare gli elementi del gruppo degli automorfismi interni del gruppo dei quaternioni

Esercizio 2.
Determinare, qualora esista, un isomorfismo tra $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2$ e un sottogruppo di S_6.

Esercizio 3.
Siano $(G,+)$ e $(G',+)$ due gruppi abeliani. Sia $Hom(G,G')$ l'insieme degli omomorfismi da G in G'. Si consideri l'applicazione

$$+ : Hom(G,G') \times Hom(G,G') \longrightarrow Hom(G,G')$$

tale che $(\varphi + \psi)(x) := \varphi(x) + \psi(x)$.

a) Dimostrare che $+$ è effettivamente un'operazione binaria.

b) Dimostrare che $(Hom(G,G'),+)$ è un gruppo abeliano.

Sia $\varphi \in Hom(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m)$. Mostrare che:

c) l'ordine di $\varphi([1]_n)$ divide n e quindi anche il $MCD(m,n)$

d) $Im(\varphi)$ è generato da $\varphi([1]_n)$ e che in particolare φ è suriettivo se e solo se $\varphi([1]_n) \in U(\mathbb{Z}_m)$

e) se $[a]_m \in \mathbb{Z}_m$ è t.c. $o([a]_m) \mid n$ allora $\psi_a : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_m$, definita come $\psi_a([x]_n) := [ax]_m$, è un omomorfismo.

Si consideri ora l'applicazione $f : (Hom(Z_n, Z_m),+) \to (Z_m,+)$ definita come $f(\varphi) := \varphi([1]_n)$.

f) Dimostrare che f è un omomorfismo iniettivo di gruppi.

g) Trovare l'immagine di f e dire a quale gruppo è isomorfo $Hom(Z_n, Z_m)$.

h) Trovare tutti gli omomorfismi da $\mathbb{Z}_{18}$ a $\mathbb{Z}_{12}$

i) Trovare tutti gli omomorfismi da $\mathbb{Z}_6$ a $\mathbb{Z}_{15}$

Sia ora $Aut(\mathbb{Z}_n)$ l'insieme degli automorfismi di $\mathbb{Z}_n$. Mostrare che:

j) $(Aut(\mathbb{Z}_n), +) \subseteq (Hom(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_n), +)$ non è un sottogruppo

k) $(Aut(\mathbb{Z}_n), \circ)$ è un gruppo

l) $(Aut(\mathbb{Z}_n), \circ)$ è isomorfo a $(U(\mathbb{Z}_n), \cdot)$.

m) Trovare tutti gli automorfismi di Z_{16}

Si consideri infine il gruppo degli endomorfismi di $\mathbb{Z}$. Sia $\nu_a : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ la moltiplicazione per a, i.e. $\nu_a(x) = ax$.

n) Dimostrare che per ogni $a \in \mathbb{Z}$, $\nu_a \in Hom(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$

o) A cosa è isomorfo $Hom(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$?

Esercizio 4.
Si immerga $\mathbb{Z}_p$ in un opportuno S_n tramite l'applicazione di Cayley ϕ. Determinare la struttura ciclica degli elementi di $\phi(\mathbb{Z}_p)$ e dire quali tra gli elementi di $\phi(\mathbb{Z}_p)$ sono coniugati in:

- $\phi(\mathbb{Z}_p)$
- S_n

Esercizio 5.
Sia G un gruppo e sia $\varphi : G \longrightarrow G$ l'applicazione che manda ogni elemnto nel suo inverso. Dimostrare che φ è biiettiva e che φ è un automorfismo se e solo se G è commutativo.

Esercizio 6.
Sia G un gruppo finito e sia φ un endomorfismo tale che più della metà degli elementi di G sia mandato nell'elemento neutro. Dimostrare che φ manda tutto G nell'elemento neutro.