Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2009/2010
AL2 - Algebra 2: Gruppi, Anelli e Campi
Prof. F. Pappalardi
Tutorato 6 - 17 Novembre 2009
Matteo Acclavio, Luca Dell'Anna
www.matematica3.com

Esercizio 1.
Dire se i seguenti insiemi, con le operazioni indicate, sono anelli ed in caso affermativo indicarne le proprietà.

- $(\mathbb{N}, +, \cdot)$
- $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$
- $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$
- $(\mathbb{C}, +, \cdot)$
- $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ ove
  $(a, b) + (a', b') := (a + a', b + b')$
  $(a, b) \cdot (a', b') := (aa', bb')$
- $(M_n, +, \cdot)$ dove $\cdot$ indica la moltiplicazione riga per colonna
- $(GL_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ dove $\cdot$ indica la moltiplicazione riga per colonna

Esercizio 2.
Sia $(A, +, \cdot)$ un anello. Dimostrare che:

- $A[X] := \{\sum_{i=1}^{n} a_i X^i \quad a_i \in A\}$ è un anello
- Se A è unitario allora lo è anche $A[X]$
- Se A è commutativo allora lo è anche $A[X]$
- $I := \{f(X) \ : a_0 = 0\}$ è un ideale di $A[X]$
- $Nil(A) := \{a \in A \ \mid \ a^n = 0 \ \ \exists n \geq 1\}$ è un ideale di A
- Dato $x \in Nil(A)$ allora $1 + x \in U(A)$
- Se $x^2 = x \quad \forall x \in A$ allora $2x = 0 \quad \forall x \in A$
- Nelle ipotesi precedenti mostrare che $xy(x + y) = 0 \ \ \forall x, y \in A$

Esercizio 3.
Si consideri $B := \{f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}\}$ l'insieme delle applicazioni da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{Z}$ con le seguenti operazioni:
$(f+g)(n) := f(n) + g(n)$ $\qquad\qquad$ $(fg)(n) := f(n)g(n)$.

- Dimostrare che B è un anello commutativo unitario.
- Dimostrare che B NON è un dominio di integrità.
- Descrivere l'insieme degli zero-divisori e degli elementi invertibili di B e mostrare che nessuno dei due è un ideale di B.
- Per ogni sottoinsieme $X \subseteq N$ definiamo

  $$I(X) := \{f \in B \ : \ f(x) = 0 \ \forall x \in X\}.$$

  Dimostrare che $I(X)$ è un ideale.

Esercizio 4.
Si consideri

$$A := \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \ \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Dire se A è un sottoanello, ideale destro, ideale sinistro o ideale bilatero dell'anello delle matrici quadrate di ordine 2 a coefficienti in $\mathbb{Z}$.