COGNOME .... *NOME* .... *MATRICOLA* ....

Risolvere il massimo numero di esercizi accompagnando le risposte con spiegazioni chiare ed essenziali. *Inserire le risposte negli spazi predisposti. NON SI ACCETTANO RISPOSTE SCRITTE SU ALTRI FOGLI. Scrivere il proprio nome anche nell'ultima pagina.* 1 Esercizio = 5 punti. Tempo previsto: 2 ore. Nessuna domanda durante la prima ora e durante gli ultimi 20 minuti.

FIRMA	1	2	3	4	5	6	7	8	TOT.
....									

1. Rispondere alle seguenti domande fornendo una giustificazione di una riga:

   a. È vero che esistono infiniti n tali che l'n–agono regolare è costruibile con riga e compasso?

   ....

   b. E' vero che il gruppo di Galois di un qualsiasi polinomio in $\mathbf{F}_p[X]$ è abeliano?

   ....

   c. È vero che tutte le estensioni di $\mathbf{F}_p(X^p, Y^p)$ sono non semplici?

   ....

   d. È vero che alcuni polinomi irriducibili di grado 5 sono risolubili per radicali?

   ....

2. Dopo averne calcolato il gruppo di Galois, determinare il reticolo dei sottocampi del campo di spezzamento del polinomio $(X^2 + 3)(X^3 - 2) \in \mathbf{Q}[x]$.

3. Determinare il campo di spezzamento di $X^8 + 2X^4 + 2$ su $\mathbf{Q}$ e dimostrare che è contenuto in un'estensione risolubile.

4. Calcolare le radici di $X^3 + X + 1$ nel campo $(\mathbf{F}_2[\alpha], \alpha^3 = 1 + \alpha^2)$.

5. Dimostrare che $\Psi_{p^2}(x)$ il p^2–esimo polinomio ciclotomico ($p \geq 3$ primo)) è $(x^{p^2} - 1)/(x^p - 1)$ e usare questa identità per verificare che il suo discriminante è pari a $\pm p^{p(2p-3)}$.
Suggerimento: mostrare che se $\zeta_{p^k} = e^{2\pi i/p^k}$*, allora* $\Psi'_{p^2}(\zeta_{p^2}) = p^2/(\zeta_{p^2}(\zeta_p - 1))$*. Quindi usare una formula nota.*

6. Si enunci nella completa generalità il Teorema di corrispondenza di Galois.

7. Sia $E = \mathbf{Q}[\sqrt{3}, \sqrt{5}]$. Determinare un elemento primitivo $\gamma \in E$ su $\mathbf{Q}$ e scriverne il polinomio minimo su $\mathbf{Q}$. Descrivere tutti i sottocampi di E.

8. Determinare un numero algebrico il cui polinomio minimo sui razionali ha un gruppo di Galois isomorfo a $C_3 \times C_9 \times C_{27}$.