

COGNOME NOME MATRICOLA

Risolvere il massimo numero di esercizi accompagnando le risposte con spiegazioni chiare ed essenziali. *Inserire le risposte negli spazi predisposti. NON SI ACCETTANO RISPOSTE SCRITTE SU ALTRI FOGLI. Scrivere il proprio nome anche nell'ultima pagina.* 1 Esercizio = 5 punti. Tempo previsto: 2 ore. Nessuna domanda durante la prima ora e durante gli ultimi 20 minuti.

| FIRMA | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | TOT. |
|-------|---|---|---|---|---|---|---|---|------|
| | | | | | | | | | |

1. Rispondere alle seguenti domande fornendo una giustificazione di una riga (giustificazioni incomplete o poco chiare comportano punteggio nullo):

a. È vero che esistono gruppi che non sono gruppi di Galois di estensioni di campi finiti?

.....

b. Scrivere una \mathbf{Q} -base del campo di spezzamento del polinomio $(X^3 - 3)(X^3 - 2) \in \mathbf{Q}[X]$.

.....

c. È vero che ogni estensione di un campo di caratteristica 0 ammette un elemento primitivo?

.....

d. È vero che se l' n -gono regolare è costruibile allora anche l' $8n$ -gono lo è?

.....

e. Fornire un esempio di estensione algebrica e infinita e dire se ogni estensione finita è algebrica.

.....

2. Dopo aver enunciato la definizione di campo di spezzamento, dimostrare che ogni polinomio a coefficienti in qualsiasi campo ammette un campo di spezzamento.

3. Sia $r \in \mathbf{N}$. Fornire un esempio di polinomio in $\mathbf{Q}[X]$ il cui gruppo di Galois è isomorfo a $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^r$.

4. Calcolare il gruppo di Galois del polinomio $X^3 + 2X + 2 \in \mathbf{F}_3[X]$.

5. Fornire la definizione di sottogruppo transitivo di S_n e spiegare l'utilità di tale nozione in Teoria di Galois.

6. Si enunci e si dimostri il Lemma di Artin.

7. Costruire un campo finito con 16 elementi e determinare l'ordine di ciascuno dei suoi elementi non nulli.

8. Dopo aver fornito la dimostrazione di numero costruibile, dimostrare che tutti gli elementi del campo di spezzamento del polinomio $x^4 - 2 \in \mathbf{Q}[x]$ sono costruibili.