COGNOME .... *NOME* .... *MATRICOLA* ....

Risolvere il massimo numero di esercizi accompagnando le risposte con spiegazioni chiare ed essenziali. *Inserire le risposte negli spazi predisposti. NON SI ACCETTANO RISPOSTE SCRITTE SU ALTRI FOGLI.* 1 Esercizio = 4 punti. Tempo previsto: 2 ore. Nessuna domanda durante la prima ora e durante gli ultimi 20 minuti.

FIRMA	1	2	3	4	5	6	7	8	TOT.
....									

1. Rispondere alle seguenti domande fornendo una giustificazione di una riga:

   a. E' vero che il grado di $F[\alpha]$ su F, se finito, è pari a $\deg f_\alpha$?

   b. E' vero che esistono campi con elementi algebrici sul sottocampo fondamentale il cui polinomio minimo è non separabile?

   c. Determinare il grado del campo $\mathbf{Q}(\cos(\pi/22))$.

   d. Fornire un esempio di estensione finita E/F tale che $1 < \# \operatorname{Aut}(E/F) < [E:F]$.

2. Calcolare il polinomio minimo di $1/\alpha$ e di $1/(\alpha-1)$ nel campo $\mathbf{Q}[\alpha], \alpha^4 = \alpha + 1$.

3. Dopo aver definito la nozione di polinomio ciclotomico $\Phi_n(X)$, si dimostrino le seguenti proprietà:
   a. Se p è primo, $\Phi_p(X) = (X^p - 1)/(X - 1)$
   b. Se $\alpha \geq 1$, $\Phi_{p^\alpha}(X) = \Phi_p(X^{p^{\alpha-1}})$
   c. Se n è dispari, $\Phi_{2n}(X) = \Phi_n(-X)$

4. Dopo aver descritto tutti gli elementi di $\operatorname{Aut}(\mathbf{Q}(5^{1/3}, \sqrt{-3})/\mathbf{Q})$, si determini l'ordine di ciascuno di essi.

5. Determinare il campo di spezzamento su $\mathbf{Q}$ di $f(X) = (X^4 - 2)(X^2 + 1)((X-3)^2 + 6) \in \mathbf{Q}[X]$ e se ne determini il grado su $\mathbf{Q}$.

6. Dopo aver definito la nozione di campo perfetto, si forniscano esempi di campi perfetti e di campi non perfetti.

7. Dopo aver verificato che è algebrico, calcolare il polinomio minimo di $\cos\pi/10$ su $\mathbf{Q}$. (*suggerimento: calcolare* $\cos 2\pi/5$ *e poi usare le formule di duplicazione degli angoli - altri metodi potrebbero essere troppo lunghi*)

8. Dopo aver verificato che $\mathbf{Q}(\sqrt{2}) \subset \mathbf{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{6})$, descrivere gli $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$–omomorfismi del campo $\mathbf{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{6})$ in $\mathbf{C}$.