

COGNOME NOME MATRICOLA

Risolvere il massimo numero di esercizi accompagnando le risposte con spiegazioni chiare ed essenziali. *Inserire le risposte negli spazi predisposti. NON SI ACCETTANO RISPOSTE SCRITTE SU ALTRI FOGLI. Scrivere il proprio nome anche nell'ultima pagina.* 1 Esercizio = 5 punti. Tempo previsto: 2 ore. Nessuna domanda durante la prima ora e durante gli ultimi 20 minuti.

FIRMA	1	2	3	4	5	6	7	8	TOT.
.....									

1. Rispondere alle seguenti domande fornendo una giustificazione di una riga:

a. E' vero che il campo di spezzamento su \mathbf{F}_p di $f(X) \in \mathbf{F}_p[X]$ ha sempre $p^{\deg f}$ elementi?

.....

b. E' vero che per ogni $a \in \mathbf{Q}^*$, il grado $[\mathbf{Q}[a^{1/4}] : \mathbf{Q}] = 4$?

.....

c. Quali sono i valori di $b \in \mathbf{Q}^*$, per cui $\mathbf{Q}[b^{1/6}]/\mathbf{Q}$ è Galois.

.....

d. È vero che tutti i gruppi di Galois dei polinomi di grado 5 sono tutti sottogruppi di S_5 ?

.....

2. Fornire un esempio di un polinomio irriducibile di grado sei il cui gruppo di Galois è isomorfo a S_3 .

3. Sia p un numero primo. Sia $H \subset \text{Gal}(\mathbf{Q}[\zeta_p]/\mathbf{Q})$ l'unico sottogruppo con $(p-1)/2$ elementi. Si determini il periodo di Gauss η_H .

4. Dopo aver dimostrato che $X^2 + 3 \in \mathbf{F}_5[X]$ è irriducibile, si consideri $\mathbf{F}_{5^2} = \mathbf{F}_5[\alpha]$, $\alpha^2 = 2$ e si determinino i generatori di $\mathbf{F}_5[\alpha]^*$.

5. Descrivere il reticolo dei sottocampi del campo ciclotomico $\mathbf{Q}[\zeta_{15}]$ menzionando in ciascun caso i generatori.

6. Si enunci nella completa generalità il Teorema di corrispondenza di Galois.

7. Dopo aver enunciato il Teorema dell'elemento primitivo, si consideri $E = \mathbf{Q}[\sqrt{3}, \sqrt{-2}, \sqrt{-6}]$. Determinare un elemento primitivo $\gamma \in E$ su \mathbf{Q} e scriverne il polinomio minimo su \mathbf{Q} . Descrivere inoltre tutti i sottocampi di E .

8. Determinare un numero algebrico il cui polinomio minimo sui razionali ha un gruppo di Galois isomorfo a C_{24} .