COGNOME .... *NOME* .... *MATRICOLA* ....

Risolvere il massimo numero di esercizi accompagnando le risposte con spiegazioni chiare ed essenziali. *Inserire le risposte negli spazi predisposti. NON SI ACCETTANO RISPOSTE SCRITTE SU ALTRI FOGLI. Scrivere il proprio nome anche nell'ultima pagina.* 1 Esercizio = 5 punti. Tempo previsto: 2 ore. Nessuna domanda durante la prima ora e durante gli ultimi 20 minuti.

FIRMA	1	2	3	4	5	6	7	8	TOT.
....									

1. Rispondere alle sequenti domande fornendo una giustificazione di una riga (giustificazioni incomplete o poco chiare comportano punteggio nullo):

   a. Quali sono i valori di $b \in \mathbf{C}$ tali che $[\mathbf{Q}[\sqrt{bi}] : \mathbf{Q}] = 2$?

   ....

   b. Scrivere una $\mathbf{Q}$–base del campo di spezzamento del polinomio $X^6 - 1 \in \mathbf{Q}[X]$.

   ....

   c. È vero che se K è il campo di spezzamento di $X^6 + X^2 + 1 \in \mathbf{F}_2[X]$, allora $[K : \mathbf{F}_2] = 3$?

   ....

   d. È vero che le estensioni finite di campi finiti sono sempre cicliche?

   ....

2. Dimostrare che se R è un dominio che contiene un campo F tale che $\dim_F R$ è finita, allora R è un campo. Dimostrare che l'ipotesi che $\dim_F R < \infty$ è necessaria.

3. Enunciare e dimostrare le formule di Cardano per le radici di un polinomio di terzo grado e applicarle per il polinomio $X^3 + X + 1 \in \mathbf{Q}[X]$.

4. Descrivere tutti gli elementi del gruppo di Galois del polinomio $x^6 - 9 \in \mathbf{Q}[x]$.

5. Spiegare perchè non è possibile quadrare il cerchio.

6. Si enunci nella completa generalità il Teorema di corrispondenza di Galois.

7. Dato un campo finito $\mathbf{F}_{p^n}$. Dimostrare che se $\gamma \in \mathbf{F}_{p^n}^*$ è un generatore (del gruppo moltiplicativo), allora tutte le radici del polinomio minimo $f_\gamma(X) \in \mathbf{F}_p[X]$ sono generatori.

8. Considerare l'estensione algebrica semplice $\mathbf{Q}[\alpha], \alpha^4 = \alpha - 1$ (assumendo l'irriducibilità di $X^4 - X + 1$). Determinare un espressione per il polinomio minimo su $\mathbf{Q}$ di $\alpha/(a\alpha + b)$ per ogni $a, b \in \mathbf{Q}$.