Tutorato di AL310

Tutori

Luciana Longo   Sara Milliani

Anno Accademico 2016/2017

19 Ottobre 2016

1. Trovare il polinomio minimo dei seguenti numeri complessi (dove non indicato il campo base è Q)

$$\alpha)\sqrt[4]{2} \qquad \beta)\sqrt[5]{4} \qquad \gamma)\sqrt[3]{2}+1 \qquad \delta)\sqrt[3]{2}+\sqrt{2} \quad su \quad Q(\sqrt{2})$$

$$\epsilon)\sqrt{2}+\sqrt{5} \quad su \quad Q(\sqrt{10}) \qquad \zeta)\xi_{16} \quad su \quad Q(i) \qquad \eta)\frac{\sqrt[4]{2}}{1+\sqrt{2}}$$

2. Calcolare il grado dei seguenti ampliamenti:

$$\alpha)Q \subseteq Q(\sqrt{7},\sqrt{13}) \qquad \beta)Q \subseteq Q(\sqrt{12},\sqrt{15}) \qquad \gamma)Q \subseteq Q(\sqrt{2},i)$$

$$\delta)Q \subseteq Q(\sqrt{3},\sqrt{5},\sqrt{60}) \qquad \epsilon)Q \subseteq Q(\frac{2}{3}(\sqrt[3]{2}),\sqrt[3]{2}-1) \qquad \zeta)Q(\sqrt{3}) \subseteq Q(\sqrt{3},\sqrt{6})$$

$$\eta)Q(\pi) \subseteq Q(\pi,\sqrt[3]{7}) \qquad \theta)Q(\pi^4) \subseteq Q(\pi)$$

3. Calcolare il polinomio minimo di $cos(\frac{2\pi}{7})$ e $cos(\frac{2\pi}{9})$ su Q.

4. Descrivere il reticolo dei sottocampi di $Q(\xi_5)$,$Q(\xi_7)$,$Q(\xi_9)$ e $Q(\xi_{11})$.

5. Sia $Q \subseteq K$ un ampliamento di campi tale che $[K : Q] = 10$. Spiegare perché $\sqrt[3]{2} \notin$ K.

6. Sia dato il polinomio:

$$f(X) = X^5 - X^3 - 6X - \frac{1}{3}X^4 + \frac{1}{3}X^2 + 2 \in Q[X]$$

Stabilire se gli anelli $\frac{Q[X]}{(f(X))}, \frac{R[X]}{(f(X))}, \frac{C[X]}{(f(X))}$ sono campi e/o domini. (Ripetere l'esercizio con $f(x) = x^3 - 5x + 3$).

7. Stabilire se $\pi + \frac{1}{\pi}$ é algebrico o trascendente su Q e su $Q(\pi^2)$.

8. Sia $\alpha := \sqrt[4]{3}$ e $K := Q(\alpha)$.

   (a) Determinare il polinomio minimo di α in Q.

(b) Verificare che $Q(\sqrt{3}) \subseteq K$ e determinare il polinomio minimo di α su $Q(\alpha)$.

(c) Posto $\beta := \sqrt{3} + (\sqrt[4]{27}) - 2$, dire perché $\beta \in K$.

9. Sia $f(x) = x^3 - 5x - 1 \in Q[x]$.

   (a) Stabilire se $\dfrac{Q[x]}{(f(x))}$ è un campo e/o dominio.

   (b) Sia $\alpha \in C$ tale che $f(\alpha) = 0$. Determinare $[Q(\alpha) : Q]$ e descrivere $Q(\alpha)$.

   (c) Trovare gli inversi di $\alpha + 1, \quad \alpha^2 + \alpha + 1, \quad 2 + \alpha, \quad \alpha^3 - 5\alpha$ in $Q(\alpha)$.

10. Determinare il campo di spezzamento in C dei seguenti polinomi e calcolarne il grado:

    (a) $(X^2 - 5)(X^3 - 7) \quad su \quad Q$

    (b) $X^4 + 30X^2 + 45 \quad su \quad Q$

    (c) $X^4 - X^2 + 5 \quad su \quad Q$