Tutorato 5 AL310

Tutori: Luciana Longo e Sara Milliani

30 Novembre 2016

1. Determinare se i seguenti ampliamenti sono normali:
   (a) $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{2})$
   (b) $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$
   (c) $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$
   (d) $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt[3]{5})$
   (e) $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt[3]{7}, \xi_3)$
   (f) $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\xi_{13})$
2. Si determini un'immersione $\varphi : \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) \hookrightarrow \mathbb{C}$ che non sia un automorfismo di $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ e si estenda φ ad un automorfismo di $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, \imath)$.
3. Sia ζ una radice primitiva ventitreesima dell'unitá e K:= $\mathbb{Q}(\zeta)$. Dopo aver determinato il gruppo $Gal_{\mathbb{Q}}K$, si illustri la corrispondenza di Galois, esibendo, per ciascun campo intermedio fra $\mathbb{Q}$ e K, un suo elemento primitivo su $\mathbb{Q}$.
4. Si ponga $K := \mathbb{Q}(\sqrt{10}, \sqrt{14}, \sqrt{35})$.
   (a) Si calcoli $[K : \mathbb{Q}]$, giustificando la risposta.
   (b) Dopo aver descritto $Gal_{\mathbb{Q}}K$, si trovino tutti i campi intermedi fra $\mathbb{Q}$ e K.
5. Sia $K \subseteq \mathbb{C}$ il campo di spezzamento del polinomio $x^3 - 2$. Costruire esplicitamente un isomorfismo fra $Gal_{\mathbb{Q}}K$ ed S_3.
6. Calcolare il gruppo di Galois dei seguenti polinomi:
   (a) $x^3 - 5$
   (b) $x^3 - x - 2$

(c) $x^5 + 5x^4 - 5$

(d) $x^5 - 3x - 1$

7. Costruire, tramite corrispondenza di Galois, il reticolo dei sottocampi compresi tra K e $\mathbb{Q}$ con $K = \mathbb{Q}(\xi_{13})$ e $K = \mathbb{Q}(\xi_{11})$.

8. Si consideri il polinomio $f(x) = x^4 + x^3 - 5x - 5 \in \mathbb{Q}[\mathrm{x}]$.

   (a) Determinare il gruppo di Galois di $f(x)$ su $\mathbb{Q}$ e la sua struttura.

   (b) Esplicitare la corrispondenza di Galois per il polinomio $f(x)$ su $\mathbb{Q}$.

9. Costruire, tramite corrispondenza di Galois, il reticolo dei sottocampi compresi tra K e $\mathbb{Q}$ con $K = \mathbb{Q}(\xi_8)$ e $K = \mathbb{Q}(\xi_{12})$.

10. Siano $f(x) := x^3 + x + 1,\ g(x) := x^3 + x^2 + 1 \in \mathbb{F}_2[\mathrm{x}]$.

    (a) Mostrare che $f(x)$ e $g(x)$ sono irriducibili su $\mathbb{F}_2$.

    (b) Data una radice α di $f(x)$ ed una radice β di $g(x)$, costruire i campi $F = \mathbb{F}_2(\alpha)$ e $K = \mathbb{F}_2(\beta)$.

    (c) Mostrare che F e K sono isomorfi e costruire esplicitamente tutti gli isomorfismi tra F e K.

11. Sia K il campo di spezzamento del polinomio $f(x) = x^4 - 3$ su $\mathbb{Q}$.

    (a) Si determini un isomorfismo tra $Gal_{\mathbb{Q}}K$ ed un gruppo noto.

    (b) Si descriva la corrispondenza di Galois per $\mathbb{Q} \subseteq K$.

    (c) Si trovino i sottocampi di K che sono normali su $\mathbb{Q}$.