COGNOME .... *NOME* .... *MATRICOLA* ....

Risolvere il massimo numero di esercizi accompagnando le risposte con spiegazioni chiare ed essenziali. *Inserire le risposte negli spazi predisposti. NON SI ACCETTANO RISPOSTE SCRITTE SU ALTRI FOGLI.* 1 Esercizio = 4 punti. Tempo previsto: 2 ore. Nessuna domanda durante la prima ora e durante gli ultimi 20 minuti.

FIRMA	1	2	3	4	5	6	7	8	TOT.
....									

1. Rispondere alle seguenti domande fornendo una giustificazione di una riga:

   a. Quale è il grado del campo di spezzamento del polinomio $(T^2+1)(T^2+2)(T^4-2) \in \mathbf{Q}[T]$?

   ....

   b. E' sempre vero che, se $\alpha \in \mathbf{C}$ è algebrico, allora $\#\mathrm{Aut}(\mathbf{Q}[\alpha]/\mathbf{Q}) = [\mathbf{Q}[\alpha] : \mathbf{Q}]$?

   ....

   c. E' vero che $\sin 2\pi/n \in \mathbf{Q}(\zeta_n)$?

   ....

   d. E' vero che ogni estensione algebrica è finita?

   ....

2. Sia $f \in \mathbf{Q}[X]$, irriducibile e di grado 8. Considerare il campo $\mathbf{Q}[\alpha], f(\alpha) = 0$ e dimostrare che $\mathbf{Q}[\alpha] = \mathbf{Q}[\alpha^3]$. Fornire un esempio esplicito di f come sopra ma tale che valgono le inclusioni proprie $\mathbf{Q}[\alpha] \supset \mathbf{Q}[\alpha^2] \supset \mathbf{Q}$.

3. Sia d un intero positivo dispari fissato. Dopo aver dimostrato che $f_d = X^4 - 2X^2 - 2d \in \mathbf{Q}[X]$ è irriducibile, si denoti con $F_d = \mathbf{Q}[\alpha], \alpha^4 = 2\alpha^2 + 2d$.
   a. Dimostrare che F_d ha un sottocampo isomorfo a $\mathbf{Q}[\sqrt{1+2d}]$,
   b. Calcolare il grado del campo di spezzamento di f_d su $\mathbf{Q}$.

4. Dopo aver descritto tutti gli elementi di $\mathrm{Aut}(\mathbf{Q}(2^{1/4}, \sqrt{-1})/\mathbf{Q})$, si determini l'ordine di ciascuno di essi.

5. Determinare il campo di spezzamento su $\mathbf{Q}$ di $f(X) = x^{15} - x^8 - x^7 + 1 \in \mathbf{Q}[X]$ e se ne determini il grado su $\mathbf{Q}$.

6. Dopo aver verificato che $\mathbf{Q}(\sqrt{2}) \subset \mathbf{Q}(\zeta_8)$, descrivere gli $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$–omomorfismi del campo $\mathbf{Q}(\zeta_8)$ in $\mathbf{C}$.

7. Dopo aver verificato che è algebrico, calcolare il polinomio minimo di $\sin \pi/12$ su $\mathbf{Q}$.

8. Enunciare e dimostrare il Lemma di Artin.