AL310 AA17/18 (Teoria delle Equazioni) ESAME DI FINE SEMESTRE Roma, 18 Dicembre 2017.

COGNOME .... *NOME* .... *MATRICOLA* ....

Risolvere il massimo numero di esercizi accompagnando le risposte con spiegazioni chiare ed essenziali. *Inserire le risposte negli spazi predisposti. NON SI ACCETTANO RISPOSTE SCRITTE SU ALTRI FOGLI. Scrivere il proprio nome anche nell'ultima pagina.* 1 Esercizio = 4 punti. Tempo previsto: 2 ore. Nessuna domanda durante la prima ora e durante gli ultimi 20 minuti.

FIRMA	1	2	3	4	5	6	7	8	9
....									

1. Rispondere alle seguenti domande fornendo una giustificazione di una riga:

   a. E' vero che se $f(X), g(X) \in \mathbf{F}_p[X]$ hanno lo stesso grado, allora hanno campi di spezzamento su $\mathbf{F}_p$ isomorfi?

   b. Dire quali dei seguenti numeri sono costruibili: $\sqrt{\cos(2\pi/17)}, \cos(2\pi/18), (3+3^{1/2})^{1/4}$, $120\sqrt{\pi}$?

   c. Calcolare il numero di divisori di $x^{124}-1 \in \mathbf{F}_5[x]$.

   d. È vero che se $f \in \mathbf{Q}[X]$ ha grado 2^n allora le sue radici sono costruibili?

2. Fornire un esempio di un polinomio irriducibile di grado otto il cui gruppo di Galois è isomorfo al gruppo delle simmetrie del quadrato D_4.

3. Sia $f_a(x) = x^3 - 3x + a$. Determinare quattro valori di $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbf{Z}$ in modo tale che i tre gruppi di Galois $G_{f_{a_1}}, G_{f_{a_2}}, G_{f_{a_3}}$ e $G_{f_{a_4}}$ siano a due a due non isomorfi. (*suggerimento: considerare* $a = 0, 1, 2, 3$)

4. Si determini esplicitamente un isomorfismo tra $\mathbf{F}_2[\alpha], \alpha^4 = \alpha + 1$ e $\mathbf{F}_2[\beta], \beta^4 = \beta^3 + \beta^2 + \beta + 1$.

5. Descrivere il reticolo dei sottocampi del campo ciclotomico $\mathbf{Q}[\zeta_{20}]$ menzionando i ciascun caso i generatori.

6. Si enunci nella completa generalità il Teorema di corrispondenza di Galois.

7. Calcolare il gruppo di Galois del polinomio $x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 14 \in \mathbf{Q}[x]$.

8. Calcolare il gruppo di Galois del polinomio $x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 14 \in \mathbf{F}_3[x]$. (*suggerimento: considerare* $x^2 + 1 \in \mathbf{F}_3[x]$)

9. Determinare un numero algebrico il cui polinomio minimo sui razionali ha un gruppo di Galois isomorfo a $C_2 \times C_{50}$.