COGNOME .... *NOME* .... *MATRICOLA* ....

Risolvere il massimo numero di esercizi accompagnando le risposte con spiegazioni chiare ed essenziali. *Inserire le risposte negli spazi predisposti. NON SI ACCETTANO RISPOSTE SCRITTE SU ALTRI FOGLI. Scrivere il proprio nome anche nell'ultima pagina.* 1 Esercizio = 4 punti. Tempo previsto: 2 ore. Nessuna domanda durante la prima ora e durante gli ultimi 20 minuti.

FIRMA	1	2	3	4	5	6	7	8	9
....									

1. Rispondere alle sequenti domande fornendo una giustificazione di una riga (giustificazioni incomplete o poco chiare comportano punteggio nullo):

   a. E' vero che le estensione finite di campi finiti sono sempre estensioni di Galois?

   ....

   b. Scrivere una $\mathbf{Q}$–base del campo di spezzamento del polinomio $(X^2-2)(X^2-3) \in \mathbf{Q}[X]$.

   ....

   c. È vero che se $f \in \mathbf{F}_5[X]$ è un polinomio riducibile di grado tre allora il suo campo di spezzamento è sempre contenuto in $\mathbf{F}_5[\alpha], \alpha^2 = \alpha - 2$?

   ....

   d. Fornire un esempio, se esiste, di estensione trascendente di $\mathbf{F}_{101}$.

   ....

2. Dimostrare che se E/F è un estensione finita, allora è algebrica e finitamente generata. Fornire un esempio di estensione algebrica e non finitamente generata e un emsempio di estensione finitamente generata ma non algebrica.

3. Fornire un esempio di polinomio $f \in \mathbf{Q}[X]$ con gruppo di Galois $G_f \cong A_4$ e con $G_f \cong C_4$ (pensare a $x^4 - 7x^2 + 3x + 1$ e a $x^4 + 5x + 5$).

4. Calcolare le radici di $X^3 + X^2 + 1$ nel campo $\mathbf{F}_2[\gamma], \gamma^3 = \gamma + 1$ e determinare $a, b, c \in \mathbf{F}_2$, se esistono, tali che $1/\gamma^4 = a + b\gamma + c\gamma^2$.

5. Sia E il campo di spezzamento di $(x^5-3)(x^5-7) \in \mathbf{Q}[x]$. Quale è il grado di E su $\mathbf{Q}$? Elencare almeno 10 sottocampi di E che non sono contenuti nei campi di spezzamento di x^5-3 e di x^5-7. Ce ne sono altri con la stessa propriet 'a? (E' lecito assumere che 7 non è un quinta potenza nel campo di spezzamento di x^5-3)

6. Si enunci e si dimostri nella completa generalità il Teorema di corrispondenza di Galois.

7. Dopo aver definito il discriminante D_f di un polinomio irriducibile $f \in \mathbf{F}[X]$ di grado n, ($\mathbf{F}$ campo di caratteristica zero), si dimostri che $D_f \in \mathbf{F}$ è un quadrato perfetto se e solo se il gruppo di Galois G_f è isomorfo a un sottogruppo dell gruppo alterno A_n.

8. Deteminare un numero algebrico γ tale che $\mathbf{Q}[\gamma]/\mathbf{Q}$ è di Galois e con gruppo di Galois isomorfo a $C_{35} \oplus C_{140}$. Quale è il grado del polinomio minimo di γ?

9.
   a. Quanti sono i fattori irriducibili di $x^{255} - 1 \in \mathbf{Q}[x]$ e quali sono i loro gradi?
   b. Quanti sono i fattori irriducibili di $x^{255} - 1 \in \mathbf{F}_2[x]$ e quali sono i loro gradi?