COGNOME .... *NOME* .... *MATRICOLA* ....

Risolvere il massimo numero di esercizi accompagnando le risposte con spiegazioni chiare ed essenziali. *Inserire le risposte negli spazi predisposti. NON SI ACCETTANO RISPOSTE SCRITTE SU ALTRI FOGLI. Scrivere il proprio nome anche nell'ultima pagina.* 1 Esercizio = 4 punti. Tempo previsto: 2 ore. Nessuna domanda durante la prima ora e durante gli ultimi 20 minuti.

FIRMA	1	2	3	4	5	6	7	8	9
....									

1. Rispondere alle sequenti domande fornendo una giustificazione di una riga (giustificazioni incomplete o poco chiare comportano punteggio nullo):

   a. Quanti elementi ha il gruppo di Galois di $X^9 - 2 \in \mathbf{Q}[X]$?

   ....

   b. Scrivere una $\mathbf{Q}$–base del campo di spezzamento del polinomio $(X^5 - 2)(X^5 - 3) \in \mathbf{Q}[X]$.

   ....

   c. Quanti elementi ha il campo di spezzamento di $(X^{16} + 2X + 2)(X^8 + X^4 + 3)(X^{32} + X^2) \in \mathbf{F}_2[X]$?

   ....

   d. È possibile costruire un esempio di estensione di un campo finito con gruppo di Galois isomorfo a D_4?

   ....

2. Siano A un dominio e F un campo con $F \subset A$. Mostrare che se $\dim_F(A) < \infty$, allora A è un campo.

3. Determinare i valori di $m \in \mathbf{Z}$ tali che $\alpha = \cos m^\circ$ (il coseno di m gradi) è algebrico. Per quali che questi α risulta costruibile?

4. Determinare i gruppi di Galois su $\mathbf{Q}$ e su $\mathbf{F}_5$ del seguente polinomio $x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x - 4$.

5. Si calcoli il polinomio minimo di $\sin \pi/5$ dopo aver mostrato che si tratta di un numero algebrico.

6. Si enunci e si dimostri il Teorema di Corrispondenza di Galois.

7. Dare un esempio di campo finito $\mathbf{F}_{27}$ con 27 elementi determinando tutti i generatori del gruppo moltiplicativo $\mathbf{F}_{27}^*$.

8. Determinare $\alpha \in \overline{\mathbf{Q}}$ tale che il gruppo di Galois del polinomio minimo di $f_\alpha \in \mathbf{Q}[X]$ è isomorfo a $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^5$.

9. Descrivere in dettagli is reticolo dei sottocampi del campo di spezzamento di $X^{13} - 1 \in \mathbf{Q}[X]$.