COGNOME .... *NOME* .... *MATRICOLA* ....

Risolvere il massimo numero di esercizi accompagnando le risposte con spiegazioni chiare ed essenziali. *Inserire le risposte negli spazi predisposti. NON SI ACCETTANO RISPOSTE SCRITTE SU ALTRI FOGLI. Scrivere il proprio nome anche nell'ultima pagina.* 1 Esercizio = 4 punti. Tempo previsto: 2 ore. Nessuna domanda durante la prima ora e durante gli ultimi 20 minuti.

FIRMA	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
....										

1. Rispondere alle sequenti domande fornendo una giustificazione di una riga (giustificazioni incomplete o poco chiare comportano punteggio nullo):

   a. E' sempre vero che se F è un campo e α è algebrico su F, allora $[F(\alpha):F] = \deg f_\alpha = \#\mathrm{Gal}(f_\alpha)$ (dove $\mathrm{Gal}(f)$ indica il gruppo di Galois del polinomio $f \in F[X]$?

   ....

   b. Scrivere una $\mathbf{Q}$–base del campo $\mathbf{Q}[5^{1/4}, 5^{1/3}]$.

   ....

   c. Quanti elementi ha il campo di spezzamento di $(X^{16}+6X+2)(X^8+X^4+5)(X^{32}+X^4) \in \mathbf{F}_2[X]$?

   ....

   d. È possibile costruire un esempio di estensione di un campo finito con gruppo di Galois abeliano e isomorfo $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$?

   ....

2. Dimostrare che se F è un campo e G è un gruppo finito tale che $G \subseteq (F^*, \cdot)$, allora G è ciclico.

3. Dimostrare che un polinomio a coefficienti razionali è irriducibile se e solo se il suo gruppo di Galois agisce transitivamente sulle sue radici.

4. Determinare i gruppi di Galois su $\mathbf{Q}$ e su $\mathbf{F}_7$ del seguente polinomio $x^5 - 3^5$.

5. Si calcoli il polinomio minimo di $\cos 2\pi/15$ dopo aver mostrato che si tratta di un numero algebrico.

6. Si enunci e si dimostri il Teorema di Corrispondenza di Galois.

7. Dare un esempio, se esiste, di campo finito $\mathbf{F}_{81}$ con 81 elementi. Inoltre mostrare che se $\alpha \in \mathbf{F}_{81}^*$ è tale che $\alpha^{16} \neq 1$ e $\alpha^{40} = 80$, allora $\mathbf{F}_{80}^* = \langle \alpha \rangle$.

8. Dimostrare che se p è un numero primo, $\zeta_p = e^{2\pi/p}$ e se $H < \mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\zeta_p)/\mathbf{Q})$, allora il campo degli invarianti $\mathbf{Q}(\zeta_p)^H$ coincide con $\mathbf{Q}(\eta_H)$ dove $\eta_H = \sum_{\sigma \in H} \sigma(\zeta_p)$.

9. Descrivere in dettagli is reticolo dei sottocampi del campo di spezzamento di $X^{15} - 1 \in \mathbf{Q}[X]$ indicando per ciascun sottocampo il polinomio minimo di un generatore.