

Università degli Studi Roma Tre  
Corso di Laurea in Matematica  
Tutorato di AL310 - Istituzioni di Algebra superiore  
A.A.2017/2018  
Docente: Prof. F. Pappalardi  
Tutori: Chiara Camerini e Gianclaudio Pietrazzini

Tutorato del 3 Novembre 2017

**Esercizio 1**

Determinare l'inverso di  $\frac{1}{\alpha^2+\alpha+1}$  e  $\frac{1}{2+\alpha}$  in  $\mathbb{Q}(\alpha)$  con  $\alpha^3 - 5\alpha - 1 = 0$ .

**Esercizio 2**

Calcolare il polinomio minimo di  $\alpha = \sqrt{2} + i$  ed il grado di  $\mathbb{Q}(\alpha)$  su  $\mathbb{Q}$ .

**Esercizio 3**

Dopo aver verificato che è algebrico, calcolare il polinomio minimo su  $\mathbb{Q}$  di  $\cos \frac{\pi}{18}$ . (I esonero AA 2004/2005)

**Esercizio 4**

Sia  $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{2}i \in \mathbb{R}$ .

1. Determinare il polinomio minimo di  $\alpha$  su  $\mathbb{Q}$  e di  $\alpha$  su  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ .
2. Scrivere una  $\mathbb{Q}$ -base per  $\mathbb{Q}(\alpha)$ .
3. Dire se  $\mathbb{Q}(\alpha)$  è estensione di Galois di  $\mathbb{Q}$ .
4. Descrivere gli elementi del gruppo  $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q})$  e verificare che è ciclico.

**Esercizio 5**

Calcolare il grado  $[E : F]$  nei seguenti casi:

- a)  $E = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2})$   $F = \mathbb{Q}$
- b)  $E = \mathbb{Q}(\sqrt{5}, \xi)$ , con  $\xi^3 + \xi - 1 = 0$   $F = \mathbb{Q}$
- c)  $E = \mathbb{F}_3[\sqrt{-1}]$   $F = \mathbb{F}_3$

**Esercizio 6**

Descrivere gli  $F$ -omomorfismi di  $E$  in  $\mathbb{C}$  in ciascuno dei seguenti casi:

- a)  $E = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{10})$   $F = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$
- b)  $E = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5})$   $F = \mathbb{Q}(\sqrt{6})$

**Esercizio 7**

Calcolare il gruppo di automorfismo di  $f(x) = x^4 - 2$ .