COGNOME .... *NOME* .... *MATRICOLA* ....

Risolvere il massimo numero di esercizi accompagnando le risposte con spiegazioni chiare ed essenziali. *Inserire le risposte negli spazi predisposti. NON SI ACCETTANO RISPOSTE SCRITTE SU ALTRI FOGLI. Scrivere il proprio nome anche nell'ultima pagina.* 1 Esercizio = 4 punti. Tempo previsto: 2 ore. Nessuna domanda durante la prima ora e durante gli ultimi 20 minuti.

FIRMA	1	2	3	4	5	6	7	8	9	TOT.
....										

1. Sia $f(x) = (x^4 - 2)(x^2 + 4)$.
   -a- Determinarne il gruppo di Galois;
   -b- Etichettarne le radici usando i numeri da uno a sei e descriverne esplicitamente il gruppo di Galois come sottogruppo di S_6.

2. Considerare $\mathbf{Q}(\zeta_{105})$.
   -a- Descriverne il gruppo di Galois e scrivendolo come prodotto di gruppi ciclici
   -b- Elencarne tutti i sottocampi quadratici

3. Dimostrare che due campi finiti con lo stesso numero di elementi sono isomorfi.

4. Sia $\alpha = \cos(\pi/32)$
   -a- Dimostrare che α è costruibile;
   -b- Determinare esplicitamente una costruzione di $\mathbf{Q}(\alpha)$;
   -c- Scrivere una formula esplicita usando radicali per α.

5. Determinare un polinomio a coefficienti razionali con gruppo di Galois isomorfo a $C_6 \times S_3$.

6. Sia $p \geq 3$ un primo. Dimostrare che se $\zeta_p = e^{2\pi i/p}$, allora $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(2^{1/p}, \zeta_p)/\mathbf{Q}(\zeta_p)) \cong \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$.

7. Si enunci nella completa generalità il Teorema di corrispondenza di Galois e se ne dimostrino le parti salienti.

8. Sia $f(x) = x^4 + Ax + B \in \mathbf{Q}[x]$.
   -a- Fornire la definizione del discriminante di un polinomio a coefficienti razionali;
   -b- Dimostrare che il discriminante di f è pari a $4^4B^3 - 3^3A^4$

9. Dopo aver determinato il numero di polinomi irriducibili di grado 4 su $\mathbf{F}_2$, si determinino le radici di $x^4+x^3+x^2+x+1 \in \mathbf{F}_2[x]$ nel campo $\mathbf{F}_2[\alpha], \alpha^4 = \alpha + 1$.