COGNOME .... *NOME* .... *MATRICOLA* ....

Risolvere il massimo numero di esercizi accompagnando le risposte con spiegazioni chiare ed essenziali. *Inserire le risposte negli spazi predisposti. NON SI ACCETTANO RISPOSTE SCRITTE SU ALTRI FOGLI. Scrivere il proprio nome anche nell'ultima pagina.* 1 Esercizio = 4 punti. Tempo previsto: 2 ore. Nessuna domanda durante la prima ora e durante gli ultimi 20 minuti.

FIRMA	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
....										

1. Rispondere alle sequenti domande fornendo una giustificazione di una riga (giustificazioni incomplete o poco chiare comportano punteggio nullo):

   a. E' sempre vero che se F è un campo e α è algebrico su F, allora $[F(\alpha) : F] = \deg f_\alpha = \#\mathrm{Gal}(f_\alpha)$ (dove $\mathrm{Gal}(f)$ indica il gruppo di Galois del polinomio $f \in F[X]$?

   ....

   b. Scrivere una $\mathbf{Q}$–base del campo $\mathbf{Q}[3^{1/4}, 2^{1/3}]$.

   ....

   c. Quanti elementi ha il campo di spezzamento di $(X^{32} + 7X + 2)(X^8 + 3X^4 + 5)(X^{32} + X^4) \in \mathbf{F}_2[X]$?

   ....

   d. È possibile costruire un esempio di estensione di un campo finito con gruppo di Galois abeliano e isomorfo $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}/5\mathbf{Z}$?

   ....

2. Fornire la definizione di *composto* di due sottocampi di un campo dato e fornire un esempio in cui l'unione di due sottocampi coincide con il composto.

3. Dimostrare che un polinomio a coefficienti razionali è irriducibile se e solo se il suo gruppo di Galois agisce transitivamente sulle sue radici.

4. Determinare i gruppi di Galois su $\mathbf{Q}$ e su $\mathbf{F}_5$ del seguente polinomio $x^6 - 3^6$.

5. Sia $\alpha = \cos 2\pi/5 + \cos 2\pi/7 + \cos 2\pi/13 + \cos 2\pi/17$. Dopo aver mostrato che $\mathbf{Q}(\alpha)/\mathbf{Q}$ è Galois, si determini il grado del polinomio minimo su $\mathbf{Q}$ di α.

6. Si enunci e si dimostri il Lemma di Artin e si spieghi il suo ruolo in Teoria di Galois.

7. Dimostrare che un polinomio f di grado $n \geq 2$ a coefficienti in $\mathbf{F}_7$ è irriducibile se e solo se per ogni $k = 1, \ldots, n$, si ha che $\gcd(f, x^{7^k} - x) = 1$.

8. Determinare tutti i sottocampi cubici (cioè di grado tre su $\mathbf{Q}$) del campo di spezzamento di $(x^3-2)(x^3-3)$.

9. Descrivere in dettagli is reticolo dei sottocampi del campo di spezzamento di $X^{24}-1 \in \mathbf{Q}[X]$ indicando per ciascun sottocampo il polinomio minimo di un generatore.