COGNOME .... *NOME* .... *MATRICOLA* ....

Risolvere il massimo numero di esercizi accompagnando le risposte con spiegazioni chiare ed essenziali. *Inserire le risposte negli spazi predisposti. NON SI ACCETTANO RISPOSTE SCRITTE SU ALTRI FOGLI. Scrivere il proprio nome anche nell'ultima pagina.* 1 Esercizio = 5 punti. Tempo previsto: 2 ore. Nessuna domanda durante la prima ora e durante gli ultimi 20 minuti.

FIRMA	1	2	3	4	5	6	7	8	TOT.
....									

1.
   (a) Determinare il polinomio minimo di $2 \cdot 3^{1/3} + 3 \cdot 3^{-1/3}$ su $\mathbf{Q}$, dimostrando che si tratta del polinomio minimo.

   (b) Dimostrare che $\mathbf{Q}(2 \cdot 3^{1/3} + 3 \cdot 3^{-1/3}) = \mathbf{Q}(3^{1/3})$ e che $\mathbf{Q}(3^{1/3}) \neq \mathbf{Q}(\sqrt{3})$

2. Sia R un dominio (i.e. anello commutativo senza divisori dello zero) e supporre che F è un campo contenuto in R (come sottoanello). Dimostrare che $\dim_F R$ è finita, allora R è un campo. Mostrare che la condizione $\dim_F R < \infty$ è necessaria.

3. Dimostrare il Teorema sulla transitività sulle estenzioni algebriche:se $F \subseteq K \subseteq L$ sono estensioni di campi tali che K è algebrica su F e L è algebrica su K, allora L è algebrica su F.

4. Dimostrare che $K = \mathbf{Q}(\sqrt{-6}, \sqrt{2}, \sqrt{6}, 5^{1/4}, 5^{1/3}$ è un estensione di Galois di $\mathbf{Q}$ e determinare un polinomio di grado 24 il cui campo di spezzamento su $\mathbf{Q}$ è K.

5. Determinare il polinomio minimo di $\cos 2\pi/15$.

6. Enunciare i completa generalità il Teorema di corrispondenza di Galois e spiegarne a grandi linee la dimostrazione.

7. Dato un campo finito $\mathbf{F}_q$ $(q = p^n)$, si consideri $\gamma \in \mathbf{F}_q^*$ e sia $f_\gamma(X) \in \mathbf{F}_p[X]$ il polinomio minimo di γ su $\mathbf{F}_p$.
   a) Mostrare che se $m = \deg f_\gamma$, allora $\gamma, \gamma^p, \gamma^{p^2}, \dots, \gamma^{p^{m-1}}$ sono tutte e sole le radici di $f_\gamma(X)$.
   b) Mostrare che se γ è un generatore del gruppo moltiplicativo $\mathbf{F}_q^*$, allora tutte le radici di f_γ sono anche generatori.

8.
   a) Mostrare che per ogni numero razionale q, il numero reale $\cos(q\pi)$ è algebrico. *Suggerimento: considerare* $e^{i\pi q}$.
   b) Determinare il polinomio minimo di $3\cos(2\pi/5) + \cos(4\pi/5)$.