COGNOME .... *NOME* .... *MATRICOLA* ....

Risolvere il massimo numero di esercizi accompagnando le risposte con spiegazioni chiare ed essenziali. *Inserire le risposte negli spazi predisposti. NON SI ACCETTANO RISPOSTE SCRITTE SU ALTRI FOGLI.* 1 Esercizio = 4 punti. Tempo previsto: 2 ore. Nessuna domanda durante la prima ora e durante gli ultimi 20 minuti.

FIRMA	1	2	3	4	5	6	7	8	TOT.
....									

1. Rispondere alle seguenti domande fornendo una giustificazione di una riga:

   a. E vero che se E è il campo di spezzamento di un polinomio $f \in F[x]$ di grado n, allora lordine del gruppo degli automorfismi $\mathrm{Aut}(E/F)$ è minore di $n!$?

   b. E' vero che un estensione E di F può contenere sia elementi algebrici che trascendenti su F?

   c. Sia q un numero razionale. E' vero che $\tan q\pi$, se definito, è algebrico?

   d. Fornire un esempio di estensione infinita algebrica.

2. Calcolare il polinomio minimo di $1/\gamma$ e di $1/(\gamma + 2)$ nel campo $\mathbf{Q}[\gamma], \gamma^4 = 4\gamma + 1$.

3. Sia $\Phi_n(X) \in \mathbf{Q}[X]$ il polinomio minimo di $e^{2\pi i/n}$, si dimostrino le seguenti proprietà:
   a. Se p è primo, $\Phi_p(X) = (X^p - 1)/(X - 1)$
   b. Se $\alpha \geq 1$, $\Phi_{p^\alpha}(X) = \Phi_p(X^{p^{\alpha-1}})$
   c. Se n è dispari, $\Phi_{2n}(X) = \Phi_n(-X)$

4. Sia E us estensione di grado 3 di $\mathbf{Q}$. Dimostrare che:
   a. Esiste un polinomio $f(X) \in \mathbf{Q}[X]$ irriducibile di grado tre tale che $E \cong \mathbf{Q}[\beta], f(\beta) = 0$
   b. Dimostrare che ogni ogni elemento di $\mathbf{Q}[\beta]$ si può scrivere nella forma $(a + b\beta)/(c + d\beta)$ dove $a, b, c, d \in \mathbf{Q}$.

5. Sia K il campo di spezzamento del polinomio $x^4 - 2 \in \mathbf{Q}[x]$.
   a. Determinare $\alpha \in \mathbf{C}$ tale che $K = \mathbf{Q}(\alpha)$.
   b. Sia $G = \mathrm{Aut}(K/\mathbf{Q})$. Determinare l'ordine di G dimostrando che G non è abeliano e descrivendone gli elementi.

6. Dopo aver definito la nozione di campo perfetto, si forniscano esempi di campi perfetti e di campi non perfetti.

7. Descrivere la nozione di punti costruibili del piano.

8. Sia $K = \mathbf{Q}[\zeta], \zeta^2 + \zeta + 1 = 0$.
   a. Calcolare il polinomio minimo di $i + \sqrt{5} + \sqrt{3}$ su K.
   b. Determinare i $\mathbf{Q}(\sqrt{5})$–omomorfismi di K.