*COGNOME* .......................... *NOME* .......................... *MATRICOLA* ..........................

Risolvere il massimo numero di esercizi accompagnando le risposte con spiegazioni chiare ed essenziali. *Inserire le risposte negli spazi predisposti. NON SI ACCETTANO RISPOSTE SCRITTE SU ALTRI FOGLI. Scrivere il proprio nome anche nell'ultima pagina.* 1 Esercizio = 4 punti. Tempo previsto: 2 ore. Nessuna domanda durante la prima ora e durante gli ultimi 20 minuti.

| FIRMA | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ........ | | | | | | | | | |

1. Rispondere alle sequenti domande fornendo una giustificazione di una riga (giustificazioni incomplete o poco chiare comportano punteggio nullo):

   a. E' vero che le estensione finite di campi finiti sono sempre estensioni abeliane?

   ..........................................................................................................................................

   b. Scrivere una $\mathbf{Q}$–base del campo di spezzamento del polinomio $(X^2 - 5)(X^2 + 25) \in \mathbf{Q}[X]$.

   ..........................................................................................................................................

   c. È vero che tutti i campi con 16 elementi sono isomorfi a $\mathbf{F}_2[\alpha], \alpha^4 = \alpha + 1$?

   ..........................................................................................................................................

   d. Fornire un esempio, se esiste, di estensione trascendente di $\mathbf{F}_{103}$.

   ..........................................................................................................................................

2. Dopo aver dato la definizione di risolvente cubica di un polinomio di grado 4, verificare che un polinomio e la sua risolvente cubica hanno lo stesso discriminante.

3. Sia $p$ un primo e si consideri il polinomio $f(x) = x^4 + px + p$.
   a. Si scriva la risolvente cubica $g$ e il discriminante di $f$
   b. Determinare i valori di $p$ per cui $g$ è irriducibile-
   c. Dimostrare che se $g$ è irriducibile, allora il gruppo di Galois di $f$ è $S_4$.

4. Costruire un campo con 16 elementi e determinare l'ordine moltiplicativo di ciascuno dei suoi elementi non nulli.

5. Sia $E$ il campo di spezzamento su $\mathbf{Q}(\zeta_5)$ di $(x^5-3)(x^5-7) \in \mathbf{Q}[x]$.
   a. Quale è il grado di $E$ su $\mathbf{Q}(\zeta_5)$?
   b. Dimostrare i campi intermedi $L$ ($E \supset L \supset \mathbf{Q}(\zeta_5)$) sono esattamente 6.
   c. Elencate i campi del punto $b$..

6. Si enunci e si dimostri nella completa generalità il Teorema di corrispondenza di Galois.

7. Dopo aver definito il discriminante $D_f$ di un polinomio irriducibile $f \in \mathbf{F}[X]$ di grado $n$, ($\mathbf{F}$ campo di caratteristica zero), si dimostri che $D_f \in \mathbf{F}$ è un quadrato perfetto se e solo se il gruppo di Galois $G_f$ è isomorfo a un sottogruppo dell gruppo alterno $A_n$.

8. Dopo aver richiamato la definizione di numero algebrico costruibile, determinare i valori di $n \in \mathbf{Z}$ tali che $\cos n^\circ$ è costruibile ($n^\circ$ significa $n$ gradi).

9.
   a. Quanti sono i fattori irriducibili di $x^{80} - 1 \in \mathbf{Q}[x]$ e quali sono i loro gradi?
   b. Quanti sono i fattori irriducibili di $x^{80} - 1 \in \mathbf{F}_3[x]$ e quali sono i loro gradi?

---

**la risolvente cubica di** $x^4 + ax^2 + bx + c$ **è** $x^3 + 2ax^2 + (a^2 - 4c)x - b^2$