COGNOME .... *NOME* .... *MATRICOLA* ....

Risolvere il massimo numero di esercizi accompagnando le risposte con spiegazioni chiare ed essenziali. *Inserire le risposte negli spazi predisposti. NON SI ACCETTANO RISPOSTE SCRITTE SU ALTRI FOGLI. Scrivere il proprio nome anche nell'ultima pagina.* 1 Esercizio = 5 punti. Tempo previsto: 2 ore. Nessuna domanda durante la prima ora e durante gli ultimi 20 minuti.

FIRMA	1	2	3	4	5	6	7	8	TOT.
....									

1. Rispondere alle sequenti domande fornendo una giustificazione di una riga (giustificazioni incomplete o poco chiare comportano punteggio nullo):

   a. Quali possono essere tutti i possibili gruppi di Galois dei polinomi di grado 3 e 4 su $\mathbf{Q}$ e su $\mathbf{F}_2$?

   ....

   b. Scrivere una $\mathbf{Q}[\sqrt{-3}]$–base del campo di spezzamento del polinomio $X^3 - 2 \in \mathbf{Q}[\sqrt{-3}][X]$.

   ....

   c. È vero che due polinomi irriducibili in $\mathbf{F}_p[X]$ aventi lo stesso grado potrebbero avere campi di spezzamento non isomorfi?

   ....

   d. Elencare tutti i polinomi irriducibili (monici) di grado minore uguale a 2 su $\mathbf{F}_3$.

   ....

   e. Si scriva un espressione con radicali per $\cos 2\pi/24$ utilizzando la formula di duplicazione $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$.

   ....

2. Dato un gruppo finito G, dimostrare che esiste una estensione di campi E/F opportuna tale che $\mathrm{Gal}(E(F) \cong G$.
   Suggerimento: Usare il Teorema di Cayley, il fatto che l'enunciato è vero per $G = S_n$ e il Teorema di Corrispondenza.

3. Dimostrare che se $p > 5$ è primo tale che $(p-1)/2$ è il prodotto di k primi dispari distinti allora $\mathbf{Q}[\zeta_p]$ ammette esattamente 2^{k+1} sottocampi.

4. Descrivere il gruppo di Galois del polinomio $(X^3 - 2)(X^2 + X + 1) \in \mathbf{Q}[X]$ come sottogruppo di S_5.

5. Dimostrare che se $p \geq 3$ è primo, allora il discriminante di $X^p - 2$ è $(-1)^{(p-1)/2} 2^{p-1} p^p$.
   Suggerimento: Usare la formula per il discriminante che ha a che fare con la derivata prima.

6. Si enunci nella completa generalità il Teorema di corrispondenza di Galois dando qualche cenno sulla dimostrazione.

7. Quanti sono i fattori irriducibili del polinomio $(X^{80} - 1) \in \mathbf{F}_3[X]$ e in $\mathbf{Q}[X]$?

8. Dopo aver fornito la definizione di numero costruibile, dimostrare che tutti gli elementi del campo di spezzamento del polinomio $x^4 - 4 \in \mathbf{Q}[x]$ sono costruibili.