

COGNOME ..... NOME ..... MATRICOLA .....

Risolvere il massimo numero di esercizi accompagnando le risposte con spiegazioni chiare ed essenziali. *Inserire le risposte negli spazi predisposti. NON SI ACCETTANO RISPOSTE SCRITTE SU ALTRI FOGLI. Scrivere il proprio nome anche nell'ultima pagina.* 1 Esercizio = 5 punti. Tempo previsto: 2 ore. Nessuna domanda durante la prima ora e durante gli ultimi 20 minuti.

FIRMA	1	2	3	4	5	6	7	8	TOT.
.....									

1. Rispondere alle seguenti domande fornendo una giustificazione di una riga (giustificazioni incomplete o poco chiare comportano punteggio nullo):

a. È vero che esistono gruppi che non sono gruppi di Galois di estensioni di campi finiti?

.....

b. Scrivere una  $\mathbf{Q}$ -base del campo di spezzamento del polinomio  $(X^3 - 5)(X^3 - 7) \in \mathbf{Q}[X]$ .

.....

c. È vero che ogni estensione di un campo di caratteristica 0 ammette un elemento primitivo?

.....

d. È vero che se l' $n$ -gono regolare è costruibile allora anche l' $4n$ -gono lo è?

.....

e. Fornire un esempio di estensione algebrica e infinita e dire se ogni estensione finita è algebrica.

.....

2. Dopo aver enunciato la definizione di campo di spezzamento, dimostrare che ogni polinomio a coefficienti in qualsiasi campo ammette un campo di spezzamento.

3. Fornire un esempio di polinomio in  $\mathbf{Q}[X]$  il cui gruppo di Galois è isomorfo a  $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^4$ .

4. Calcolare il gruppo di Galois del polinomio  $X^3 + 5X + 8 \in \mathbf{F}_3[X]$ .

5. Fornire la definizione di sottogruppo transitivo di  $S_n$  e spiegare l'utilità di tale nozione in Teoria di Galois.

6. Si enunci nella completa generalità il Teorema di corrispondenza di Galois dando qualche cenno sulla dimostrazione.

7. Quanti sono i fattori irriducibili del polinomio  $(X^{124} - 1) \in \mathbf{F}_5[X]$  e in  $\mathbf{Q}[X]$ ?

8. Dopo aver verificato che è algebrico, calcolare il polinomio minimo di  $\cos \pi/9$  su  $\mathbf{Q}$ .