COGNOME .... *NOME* .... *MATRICOLA* ....

Risolvere il massimo numero di esercizi accompagnando le risposte con spiegazioni chiare ed essenziali. *Inserire le risposte negli spazi predisposti. NON SI ACCETTANO RISPOSTE SCRITTE SU ALTRI FOGLI.* 1 Esercizio = 4 punti. Tempo previsto: 2 ore. Nessuna domanda durante la prima ora e durante gli ultimi 20 minuti.

FIRMA	1	2	3	4	5	6	7	8	TOT.
....									

1. Rispondere alle seguenti domande fornendo una giustificazione di una riga:
   a. E' vero che se E/F è un estensione e se $\alpha \in E$ è trascendente su F allora $\forall m \in \mathbf{Z}, m \neq 0$, α^m è trascendente su F?
   b. E' vero che se E_1 e E_2 sono sottocampi di $\mathbf{C}$, entrambi di dimensione finita su $\mathbf{Q}$, allora il campo composto E_1E_2 è di dimensione finita su $\mathbf{Q}$?
   c. Determinare il grado del campo $\mathbf{Q}(2^{1/2}, 2^{1/3}, 2^{1/4}, \cdots, 2^{1/15})$ su $\mathbf{Q}$.
   d. E' vero che $\mathbf{Q}(\pi)$ è isomorfo a $\mathbf{Q}(e)$ (dove e è il numero di Nepero)?
2. Sia $F[\alpha]/F$ un estensione algebrica semplice. Dimostrare che se $a, b, c, d \in F$ sono tali che $ad - bc \neq 0$, allora $F[\alpha] = F[(a\alpha + b)/(c\alpha + d)]$.
3. Dopo aver dimostrato che $2\cos(2\pi/15)$ è un numero algebrico, se ne calcoli il polinomio minimo su $\mathbf{Q}$.
4. Dopo aver descritto tutti gli elementi di $\mathrm{Aut}(\mathbf{Q}(7^{1/4}, i)/\mathbf{Q})$, si determini l'ordine di ciascuno di essi.
5. Determinare il campo di spezzamento su $\mathbf{Q}$ di $f(X) = (X^4 - 3)(X^3 - 3)((X - 3)^2 - 3) \in \mathbf{Q}[X]$ e calcolarne il grado su $\mathbf{Q}$.
6. Dopo aver definito la nozione di campo perfetto, si forniscano esempi di campi perfetti e di campi non perfetti.
7. Dopo aver mostrato che $x^3 - 2x - 2 \in \mathbf{Q}[x]$ è irriducibile, si consideri il campo $\mathbf{Q}[\theta], \theta^3 = 2\theta + 2$.
   a. Determininare $a, b, c \in \mathbf{Q}$ tali che $\theta^{-5} = a + b\theta + c\theta^2$;
   b. Calcolare il polinomio minimo su $\mathbf{Q}$ di θ^2.
8.
   a. verificare che $\mathbf{Q}(\sqrt{3}) \subset \mathbf{Q}(\sqrt{15}, \sqrt{5})$;
   b. descrivere i $\mathbf{Q}(\sqrt{3})$–omomorfismi del campo $\mathbf{Q}(\sqrt{15}, \sqrt{5})$ in $\mathbf{C}$;
   c. calcolare il polinomio minimo di $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ su $\mathbf{Q}[\sqrt{15}]$.