COGNOME .... *NOME* .... *MATRICOLA* ....

Risolvere il massimo numero di esercizi accompagnando le risposte con spiegazioni chiare ed essenziali. *Inserire le risposte negli spazi predisposti. NON SI ACCETTANO RISPOSTE SCRITTE SU ALTRI FOGLI.* 1 Esercizio = 4 punti. Tempo previsto: 2 ore. Nessuna domanda durante la prima ora e durante gli ultimi 20 minuti.

FIRMA	1	2	3	4	5	6	7	8	TOT.
....									

1. Rispondere alle seguenti domande fornendo una giustificazione di una riga:

 a. E' vero che per ogni $q \in \mathbf{Q}$, $\cos(q\pi)$ è algebrico su $\mathbf{Q}$?

 ....

 b. E' vero che l'estensione $\mathbf{Q}[\pi]/\mathbf{Q}[\pi^4]$ è trascendente?

 ....

 c. Determinare il grado del campo $\mathbf{Q}[5^{1/m}, 5^{1/n}]$ su $\mathbf{Q}$ al variare di m e n in $\mathbf{N}$.

 ....

 d. E' vero che $\mathbf{Q}(\pi)$ è isomorfo a $\mathbf{Q}(\sqrt{\pi})$?

 ....

2. Sia F un campo di caratteristica 0 e E/F un estensione di grado 2 allora $E = F[\alpha]$ dove $\alpha^2 \in F$. E' vero l'analogo della stessa affermazione per estensioni di grado 3?

3. Dopo aver descritto tutti gli elementi di $\mathrm{Aut}(\mathbf{Q}(2^{1/4}, i)/\mathbf{Q})$, si determini l'ordine di ciascuno di essi. Dopo aver mostrato che $\mathbf{Q}(\zeta_8) \subset \mathbf{Q}(2^{1/4}, i)/\mathbf{Q})$, si descrivano gli automorfismi sopra che fissano $\mathbf{Q}(\zeta_8)$.

4. Data un estensione E/F, si dica cosa significa che $\alpha \in E$ è algebrico su F e cosa è il polinomio minimo di α su F dimostrando che è irriducibile.

5. Determinare il grado del campo di spezzamento su $\mathbf{Q}$, su $\mathbf{R}$ e su $\mathbf{F}_5$ di $f(X) = (X^4 - 1)(X^4 - 2)((X - 3)^2 + 2)$.

6. Si consideri $E = \mathbf{F}_5[\alpha]$ dove α è una radice del polinomio $X^2 + 2$. Determinare il polinomio minimo su $\mathbf{F}_5$ di $1/(\alpha + 3)$.

7. Dopo aver mostrato che $x^3 - 3x - 6 \in \mathbf{Q}[x]$ è irriducibile, si consideri il campo $\mathbf{Q}[\omega], \omega^3 = 3\omega + 6$.
   a. Determininare $a, b, c \in \mathbf{Q}$ tali che $\omega^{-3} = a + b\omega + c\omega^2$.
   b. Calcolare il polinomio minimo su $\mathbf{Q}$ di ω^2.

8.
   a. calcolare il polinomio minimo di $3^{1/6}$ su $\mathbf{Q}[\sqrt{3}]$.
   b. verificare che $\mathbf{Q}[3^{1/6}] \subset \mathbf{Q}[\sqrt{3}, 3^{1/9}]$;
   c. descrivere i $\mathbf{Q}[3^{1/6}]$–omomorfismi del campo $\mathbf{Q}[\sqrt{3}, 3^{1/9}]$ in $\mathbf{C}$;