COGNOME .... *NOME* .... *MATRICOLA* ....

Risolvere il massimo numero di esercizi accompagnando le risposte con spiegazioni chiare ed essenziali. *Inserire le risposte negli spazi predisposti. NON SI ACCETTANO RISPOSTE SCRITTE SU ALTRI FOGLI. Scrivere il proprio nome anche nell'ultima pagina.* 1 Esercizio = 4 punti. Tempo previsto: 2 ore. Nessuna domanda durante la prima ora e durante gli ultimi 20 minuti.

FIRMA	1	2	3	4	5	6	7	8	9	TOTALE
....										

1. Rispondere alle sequenti domande fornendo una giustificazione di una riga (giustificazioni incomplete o poco chiare comportano punteggio nullo):

   a. È vero che ogni gruppo abeliano finito è il gruppo di Galois di qualche polinomio irriducibile in $\mathbf{F}_7[X]$?

   ....

   b. Scrivere una $\mathbf{Q}[i]$–base del campo di spezzamento del polinomio $(X^2-2)(X^2+2) \in \mathbf{Q}[i][X]$.

   ....

   c. È vero che se K ha caratteristica 13 allora il polinomio $X^{13}-X+1$ non ha radici in K?

   ....

   d. È vero che se E/F è un estensione algebrica, allora E è sempre contenuto in un estensione di Galois di F?

   ....

2. Dato un gruppo finito G con p (primo) elementi, dimostrare che esiste una estensione di campi E/F opportuna tale che $\mathrm{Gal}(E/F) \cong G$.
   Suggerimento: Usare il Teorema di Cayley, il fatto che l'enunciato è vero per $G = S_p$ e il Teorema di Corrispondenza.

3.
   a. Dimostrare che $\mathbf{Q}[\zeta_{47}]$ ammette esattamente 4 sottocampi;
   b. Quanti sono is sottocampi di $\mathbf{Q}[\zeta_{47^3}]$

4. Calcolare il gruppo di Galois del polinomio $(X^3 - 3)(X^3 - 6)(X^3 - 2) \in \mathbf{Q}[X]$.

5. Calcolare il discriminante di $X^{101} - 101$.
   Suggerimento: Usare la formula per il discriminante che ha a che fare con la derivata prima.

6. Descrivere la nozione di campo perfetto dimostrando che i campi finiti sono perfetti

7. Si enunci nella completa generalità il Teorema di corrispondenza di Galois.

8. Scrivere tutti i fattori irriducibili del polinomio $(X^{2^3} - X)(X^{2^4} - X) \in \mathbf{F}_2[X]$.

9. Dato $f \in \mathbf{Q}[X]$ irriducibile di grado n, dimostrare che se $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{GL}_2(\mathbf{Q})$, allora $(cX + d)^n f((aX + b)/(cX + d))$ ha lo stesso campo di spezzamento di $f(X)$.