Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2022/2023
AL310 - Istituzioni di Algebra Superiore
Esercizi

Esercizio 1. Sia F un campo e sia $f(X) \in F[X]$.

1. Per ogni $a \in F[X]$, mostrare che esiste un polimio $q(X) \in F[X]$ tale che
$$f(X) = q(X)(X - a) + f(a);$$
2. dedurre che $f(a) = 0$ se e solo se $(X - a) \mid f(X)$;
3. dedurre che $f(X)$ può avere al più $\deg f$ radici.
4. Sia G un gruppo abeliano finito. Mostrare che, se G ha al più m elementi di ordine un divisore di m per ogni divisore m di $|G|$, allora G è ciclico.
5. Dedurre che, se F è un campo, ogni sottogruppo finito di $F^\times$ è ciclico.

Esercizio 2.

1. Sia $\alpha \in \mathbb{C}$ una radice del polinomio $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$; verificare se gli elementi $\alpha^2 + \alpha$, $\alpha^6 - 1$, $2\alpha^3$ sono linearmente indipendenti su $\mathbb{Q}$;
2. Determinare il polinomio minimo di $\alpha^4 + \alpha$ su $\mathbb{Q}$.

Esercizio 3.

- Sia $\alpha \in \mathbb{C}$ una radice del polinomio $g(x) = x^3 + 2x - 1$. Trovare il polinomio minimo di $\alpha + 1$, α^{-1}, $\alpha^2 + 1$ su $\mathbb{Q}$.
- Sia $a \in \mathbb{Q}$; calcolare il polinomio minimo di $a + \frac{\sqrt{5}}{2}$ su $\mathbb{Q}$; per quali valori di a tale polinomio minimo appartiene a $\mathbb{Z}[x]$?
- Determinare il polinomio minimo di $\sqrt{2\sqrt{2} - 3}$ su $\mathbb{Q}$ e su $\mathbb{Q}(i)$. Qual è il campo di spezzamento di questo polinomio su $\mathbb{Q}$? E su $\mathbb{Q}(i)$?

Esercizio 4. Calcolare $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3} + \sqrt{2}) : \mathbb{Q}]$.

Esercizio 5. Calcolare il campo di spezzamento di $f(x) = x^8 - 1$ su $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{F}_{17}$ e $\mathbb{F}_{43}$.

Esercizio 6. Calcolare il campo di spezzamento di $f(x) = (x^3 + 1)(x^3 - 5)$ su $\mathbb{Q}$ e su $\mathbb{F}_7$.

Esercizio 7.

- Sia F un campo di caratteristica p. Mostrare che, se il polinomio $x^p - x - a$ è riducibile in $F[x]$, allora spezza in fattori lineari in $F[x]$.
- Mostrare che, per ogni primo p, il polinomio $x^p - x - 1$ è irriducibile su $\mathbb{Q}$.

Esercizio 8. Per ogni $k \geq 1$ indichiamo con ζ_k la radice primitiva k-esima dell'unità data da $e^{\frac{2\pi i}{k}}$. Dimostrare che, se n è dispari, allora $\mathbb{Q}(\zeta_{2n}) = \mathbb{Q}(\zeta_n)$. Resta vero se n è pari?

Esercizio 9. Calcolare il campo di spezzamento del polinomio $g(x) = x^4 - 5$; denotiamo tale campo con E_g.

- Esiste un $\mathbb{Q}$-omomorfismo $\phi : E_f \to E_f$ tale che $\phi(\sqrt[4]{5}) = -\sqrt[4]{5}$ e $\phi(\sqrt[4]{5}i) = -\sqrt[4]{5}i$, dove i denota l'unità immaginaria?
- Esiste un $\mathbb{Q}$-omomorfismo $\psi : E_f \to E_f$ tale che $\phi(\sqrt[4]{5}) = \sqrt[4]{5}i$ e $\phi(\sqrt[4]{5}i) = -\sqrt[4]{5}i$?

Esercizio 10. Sia f un polinomio irriducibile in $F[x]$, con F un campo di caratteristica p. Mostrare che $f(X)$ si può scrivere come $f(x) = g(x^{p^e})$ con $g(x)$ irriducibile e separabile. Dedurre che ogni radice di f ha la stessa molteplicità p^e in ogni campo di spezzamento.