PROBLEMI DI AL5 (AA 1999/2000).

Francesco Pappalardi

1. Sia $p \equiv 1(\bmod 5)$. Dimostrare che il gruppo $\mathrm{O}(2,p)$ delle matrici quadrate ortogonali 2×2 a coefficienti in $\mathbf{F}_p$ ha $2(p-1)$ elementi.
   suggerimento: Mostrare che l'equazione $x^2+y^2=1$ in $\mathbf{F}_p$ ammette esattamente $p-1$ soluzioni sfruttando il fatto che $\sqrt{-1}\in\mathbf{F}_p$.
2. $\mathrm{O}(2,p)$ è abeliano?
3. Quanti elementi ha $\mathrm{SO}(2,p)$? $\mathrm{SO}(2,p)$ è abeliano?
4. Determinare tutti i Sylow di $\mathrm{SO}(2,12)$ e la sua struttura come gruppo abeliano (cioè lo si scriva come il prodotto di p–gruppi ciclici).
5. Si determini il centro e il derivato di un p-Sylow di $\mathrm{GL}(n,p)$.
6. Si mostri che $\mathrm{PSL}(4,2)$ e $\mathrm{PSL}(3,4)$ hanno lo stesso numero di elementi ma non sono isomorfi perchè i loro 2–Sylow hanno centri diversi (spiegare bene come si può applicare l'esercizio 4. a questo caso)
   N.B. questo è l'unico esempio che conosco di due gruppi semplici non isomorfi con lo stesso ordine.
7. Dimostrare che un gruppo di ordine 400 non è semplice.
8. Sia G un gruppo nel quale il sottogruppo derivato ha meno di due elementi. Dimostrare che se x_1, x_2 e x_3 sono tre elementi di G, allora
$$x_1x_2x_3 = x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}x_{\sigma(3)}$$
   dove σ è una permutazione non identica di $1,2,3$.
9. Sia G un gruppo e H un sottogruppo normale di G tale che
   i) Ogni automorfismo di H è interno;
   ii) Il centro di H è banale. Dimostrare che $G \cong H \times C_G(H)$ (prodotto diretto).
10. Si consideri l'azione di $\mathrm{GL}(n,q)$ su $\mathbf{F}_q^n$. Quanti elementi ha lo stabilizzatore di un elemento? Quale è lo stabilizzatore dell'elemento $\underline{e}_1$ della base canonica di $\mathbf{F}_q^n$?
11. Dire se è vero che $D_{2n} \cong D_n \times C_2$ (prodotto diretto).
12. Si determini un 2–Sylow di S_6 e uno di A_6.
13. Per ciascun primo p che divide $6!$ si determini il numero di n_p dei p–Sylow di S_6.
14. Per ciascun primo p che divide $6!/2$ si determini il numero di n_p dei p–Sylow di A_6.
15. Sia G il prodotto semidiretto $U(\mathbf{Z}/9\mathbf{Z}) \times_\varphi \mathbf{Z}/9\mathbf{Z}$ dove
$$\varphi : U(\mathbf{Z}/9\mathbf{Z}) \to Aut(\mathbf{Z}/9\mathbf{Z})$$
    è l'omomorfismo naturale. Si determini un 3–Sylow di G, si mostri che è normale e si dica se è abeliano.
16. Si determini $Aut(C_2 \times C_2 \times C_2)$.
17. Siano G e H due gruppi e sia G^H l'insieme delle applicazioni da H a G. Sia $G \wr H$ l'insieme delle coppie (f,h) con $f \in G^H$ e $h \in H$. Se (f_1,h_1) e (f_2,h_2) sono elementi di $G\wr H$ definiamo il prodotto
$$(f_1,h_1)(f_2,h_2) = (g, h_1h_2).$$
    Dove $g: \ H \to G, h \mapsto g(h) = f_1(h)f_2(hh_1)$. Si dimostri che rispetto a questa operazione $G \wr H$ è un gruppo indicandone l'elemento neutro e l'inverso del generico elemento (f,h)
    (si chiama il **prodotto a corona di** G **e** H). Quanti elementi ha $G\wr H$?
18. Mostrare che H si può immergere in $G \wr H$ in modo naturale.
19. A quale dei 5 gruppi con 8 elementi che conosciamo è isomorfo $C_2 \wr C_2$?
20. Sia $G_n = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, su G definiamo la seguente operazione:
$$(a,b,c)(a',b',c') = (a+a', b+b'+ac', c+c')$$
    i) Mostrare che rispetto a questa operazione G_n è un gruppo.
    ii) Quale è il centro di G_n?
    iii) Quale è il derivato di G_n?
    iv) A quale dei 5 gruppi di ordine 8 che conosciamo è isomorfo G_2?
    v) Mostrare che G_p è isomorfo a un p–Sylow di $\mathrm{GL}(3,p)$.