TEST DI TEORIA DEI GRUPPI, AL5 - 20 Aprile 2000

Francesco Pappalardi

Tutti gli esercizi tranne il primo valgono 10 punti oggi, 5 fino a Pasqua e 1 dopo Pasqua, il primo vale 40 punti oggi, 20 prima di Pasqua e 8 dopo Pasqua.

1) Sia q una potenza di un numero primo e sia $n > 1$ un numero intero. Denotiamo con $\mathcal{T}(n,q)$ l'insieme delle matrici di $\mathrm{GL}(n,q)$ triangolari superiori. cioè

$$\mathcal{T}(n,q) = \left\{ A \in \mathrm{GL}(n,q) \text{ tali che } A = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ * & * & 0 & \cdots & 0 \\ * & * & * & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ * & * & * & \cdots & * \end{pmatrix} \right\}$$

   a. Mostrare che $\mathcal{T}(n,q)$ è un gruppo finito rispetto al prodotto di matrici.
   b. Calcolare l'ordine di $\mathcal{T}(n,q)$.
   c. Dire se $\mathcal{T}(n,q)$ è abeliano.
   d. Determinare un l–Sylow di $\mathcal{T}(3,5)$ per ogni divisore dell'ordine.
   e. Generalizzare l'esercizio precedente a $\mathcal{T}(n,q)$.
   f. Dire per quali valori di l, gli l–Sylow di $\mathcal{T}(n,q)$ sono abeliani.
   g. Calcolare l'ordine di $S\mathcal{T}(n,q) = \{A \in \mathcal{T}(n,q) \mid \det(A) = 1\}$.
   h. Calcolare il centro e il derivato dei seguenti gruppi

$$\mathcal{T}(2,3), \quad \mathcal{T}(3,3), \quad S\mathcal{T}(2,3) \ \text{ e } \mathrm{S}\mathcal{T}(3,3).$$

2) Dimostrare che un gruppo con $1000 = 2^3 \cdot 5^3$ elementi oppure con $1500 = 3 \cdot 2^2 \cdot 5^3$ elementi non è semplice.

3) Dimostrare che $\mathrm{GL}(n,q)$ è il prodotto semidiretto di H per $\mathrm{SL}(n,q)$ dove H è un opportuno sottogruppo di $\mathrm{GL}(n,q)$.

4) Quale è il massimo ordine di un elemento in S_{11}?

5) Quanti 7–Sylow ha A_7?

6) Mostrare che tutti i p–Sylow di S_p e di A_p sono ciclici.

7) Si scriva una serie di composizione per il p–Sylow di $\mathrm{GL}(3,p)$.

8) A quale gruppo (ben noto) è isomorfo un qualsiasi 2–Sylow di $\mathrm{GL}(3,2)$?

9) Si dia un esempio di un valore di n e uno di l per cui un l–Sylow di S_n non è abeliano.

Suggerimento: Cominciare da quelli più facili!!