Esercizi di Topologia in $\mathbf{R}^n$ (I)

1 Insiemi Aperti e Chiusi

Negli esercizi che seguono "Si dimostri" è da intendersi nel seguente modo: Fornire un argomento molto succinto, utilizzando anche figure, per convincere il lettore della verità dell'affermazione.

1. Si dimostri che il rettangolo $(a, b) \times (c, d) \subset \mathbf{R}^2$ è aperto in $\mathbf{R}^2$;

2. Si dimostri che l'unione di una qualsiasi famiglia insiemi aperti in $\mathbf{R}^n$ è un insieme aperto;

3. Si dimostri che l'intersezione di due insiemi aperti di $\mathbf{R}^n$ è un insieme aperto (Quindi lo stesso vale per un numero finito di insiemi aperti);

4. Si dimostri che il complementare di un iperpiano $a_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$ in $\mathbf{R}^n$ è un insieme aperto;

5. Si disegni il grafico dell'insieme $\{x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \text{ t.c. } |x_1| + |x_2| < 1\}$ e si dimostri che è un insieme aperto;

6. Si dimostri che il disco chiuso $\bar{D}_r(x) = \{z \in \mathbf{R}^n \text{ t.c. } d(x, z) \leq r\}$ è un insieme chiuso;

7. Si dimostri che il grafico di una funzione continua $y = f(x)$ è un insieme chiuso di $\mathbf{R}^2$;

8. Si dimostri che l'intersezione di una qualsiasi famiglia di insiemi chiusi di $\mathbf{R}^n$ è un insieme chiuso di $\mathbf{R}^n$;

9. Si dimostri che l'unione di due chiusi di $\mathbf{R}^n$ è un chiuso di $\mathbf{R}^n$;

10. Si dimostri che il rettangolo chiuso $[a, b] \times [c, d] \in \mathbf{R}^2$ è un chiuso;

11. Si dimostri che il rettangolo semichiuso $(a, b] \times [c, d) \in \mathbf{R}^2$ non è aperto né chiuso;

12. Si dimostri che il cilindro $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \text{ t.c. } x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ è un insieme aperto di $\mathbf{R}^3$;

13. si dimostri che il disco "sottile"
$$\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \text{ t.c. } x_1^2 + x_2^2 < 1, x_3 = 0\}$$
non è aperto né chiuso in $\mathbf{R}^3$;

2 Chiusura, Interno, Frontiera e Punti di Accumulazione

Per ciascuno dei seguenti insiemi, si tracci la figura dell' insieme e si determini la chiusura, l'interno, la frontiera e l'insieme dei punti di accumulazione nello spazio specificato:

1. in $\mathbf{R}^2$, $\{(x,y)$ t.c. $x^2+y^2<4, x\geq 1\}$;
2. in $\mathbf{R}^2$, $\cup_{n=0}^{\infty}\{(x,y)$ t.c. $(x-n)^2+y^2=1/n\}$;
3. in $\mathbf{R}^2$,

   $D_1((0,0))\cup\{(x,y)$ t.c. $x\geq 0, x^2+y^2=1\}\cup\{(0,1),(-1,0),(2,0),(-2,0)\}$;
4. in $\mathbf{R}^3$,

   $\Big\{(x_1,x_2,x_3)$ t.c. $x_1^2+x_2^2<1, x_3\in[-2,2]\Big\}\cup\{(0,0,2),(1,0,2),(0,-1,2),(2,1,0)\}$
5. in $\mathbf{R}^3$,

   $\Big\{(x_1,x_2,x_3)$ t.c. $1<x_1^2+x_2^2+x_3^2\leq 2\Big\}\cup\{(x_1,x_2,x_3)$ t.c. $x_1=0, x_2=0\}$
6. in $\mathbf{R}^3$,

   $\{(x_1,x_2,x_3)$ t.c. $x_1+x_2+x_3<0\}\cup\{(1,1,-10),(3,3,-6),(1,1,1)\}\cup\mathbf{Z}^3$.

3 Sottoinsiemi Densi e Discreti

a. Si dimostri che i seguenti insiemi sono densi;

1. $\mathbf{R}\times\mathbf{Q}$ in $\mathbf{R}^2$; 2. $\mathbf{R}^n\setminus\{P_1,\dots,P_s\}$ in $\mathbf{R}^n$; 3. $\mathbf{R}^2\setminus\{(x,y)$ t.c. $x+y=0\}$ in $\mathbf{R}^2$;

b. Si dimostri che i seguenti insiemi sono discreti;

1. Ogni sottoinsieme finito di $\mathbf{R}^n$;
2. $\mathbf{Z}^a\times\mathbf{N}^{n-a}$ in $\mathbf{R}^n$;
3. $\mathbf{Z}\times\mathbf{N}\times S$ (dove S è finito) in $\mathbf{R}^3$;

c. Si dimostri che il complementare di un insieme discreto è denso.
d. Si dimostri che non è vero che il complementare di un insieme denso è discreto;
e. Si dimostri che $\mathbf{N}\times\mathbf{Q}$ non è denso né discreto in $\mathbf{R}^2$.