Esercizi di Topologia in $\mathbf{R}^n$ (II)

A. Dopo averne tracciato il grafico, si dimostri che ciascuno dei seguenti insiemi non è compatto costruendo in ciascun caso un ricoprimento di dischi che non ammette un sottoricoprimento finito:

1. in $\mathbf{R}^2$: $\{(x,y) \text{ t.c. } |x|+|y|<2\}$;
2. in $\mathbf{R}^3$: $\{(x_1,x_2,x_3) \text{ t.c. } x_1^2+x_2^2=1,\ x_3\in(-2,2)\}$;
3. in $\mathbf{R}^2$: $\{(x,y) \text{ t.c. } |x-y|<1, x\in[-2,2]\}$;
4. in $\mathbf{R}^3$: $\{(x,y,z) \text{ t.c. } 1<x^2+y^2+z^2\leq 4\}$;
5. in $\mathbf{R}^3$: $\{(x,y,z) \text{ t.c. } x^2-y^2-z^2<0, x\in[0,4]\}$.

B. Per ciascuna delle seguenti funzioni si tracci il grafico del dominio $\mathbf{Dom}(f)$ e si determinino:
l'interno $\mathbf{Dom}(f)^o$, la frontiera $\partial\mathbf{Dom}(f)$, la chiusura $\overline{\mathbf{Dom}(f)}$ e il derivato $D(\mathbf{Dom}(f))$:

1. $f(x,y)=\sqrt{\frac{x}{y}(x^2+(y-3)^2)}$;
2. $f(x,y)=\log(x^2+(y-5)^2)$;
3. $f(x,y)=\tan\left(\frac{\pi}{2}xy\right)$;
4. $f(x,y)=\sqrt{\log(x^2+3y^2)}$;
5. $f(x,y)=\tan\left(\frac{\pi}{2}(x+y)\right)+\log(9-x^2-y^2)$
6. $f(x,y,z)=\frac{1}{\cos(x^2+y^2+z^2)}$.

C. Si dimostri il seguente "criterio di continuità in coordinate polari":
Sia $f: A \longrightarrow \mathbf{R}$ una funzione dove $(0,0)\in A^o\subset\mathbf{R}^n$. Allora f è continua in $(0,0)$ se e solo se per ogni $\epsilon>0$ esiste δ_ϵ tale che se $0<r<\delta_\epsilon$ allora $|f(r\cos\theta, r\sin\theta)-f(0,0)|<\epsilon$.

Si applichi questo criterio per studiare la continuità della seguente funzione al variare di $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^\alpha y^\beta}{(x^2+y^2)\arctan(y^2+1)} & \text{if } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{if } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

D. Si discuta la continuità delle seguenti funzioni in $(x,y) = (0,0)$:

1.
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 y^4 \cos(1/x)}{(x^2+y^2)\arctan(y^2+x^6+1)} & \text{if } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{if } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

2.
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 y^4}{(x^6+y^6)} & \text{if } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{if } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

3.
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^4}{x^2+y^6} & \text{if } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{if } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

4.
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x+y} & \text{if } x+y \neq 0 \\ 0 & \text{if } x+y = 0 \end{cases}$$

5.
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy\sin(x+y)}{\pi - 2\arctan(y/x)} & \text{if } x \neq 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases}$$