ESERCIZI SULLE DERIVATE PARZIALI (I).

1. Si calcolino tutte le derivate parziali delle seguenti funzioni:

$$x^{(y^z)}, \qquad (x^y)^z.$$

2. Per ciascuna delle seguenti funzioni, si calcoli (se esiste):

   (a) Il gradiente $\nabla f(x_0, y_0)$;

   (b) Il differenziale $df_{(x_1,y_1)}$;

   (c) La derivata direzionale $\frac{\partial f}{\partial(v_1,v_2)}$ nel generico punto (x, y);

   (d) L'equazione del piano tangente alla superficie $z = f(x, y)$ nel punto $(x_2, y_2, f(x_2, y_2))$.

	$f(x, y)$	(x_0, y_0)	(x_1, y_1)	(x_2, y_2)	(v_1, v_2)
i	$\sin(xy)$	$(1,0)$	$(\frac{\pi}{2}, 1)$	$(7, \frac{\pi}{7})$	$(3,2)$
ii	$\log(x^2 + y^2)$	$(1,1)$	$(-1, 0)$	$(2,1)$	$(2,-1)$
iii	e^{x+2y}	$(0,0)$	$(1, 0)$	$(2, -1)$	$(1,-3)$
iv	$\tan(x^3 y)$	$(1, \frac{\pi}{4})$	$(1, 2)$	$(1,1)$	$(1,-3)$
v	$\frac{x+y}{x^4+y^4+1}$	$(1,-1)$	$(0, 1)$	$(-2, 1)$	$(5,2)$
vi	$\arctan \frac{x}{y}$	$(-1, 1)$	$(\sqrt{3}, 1)$	$(0,1)$	$(3,4)$
vii	$\log(\cos(x + y))$	$(\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8})$	$(0, \frac{\pi}{4})$	$(\frac{\pi}{3} - 1, 1)$	$(2,0)$
viii	$\frac{\cos x}{y}$	$(\frac{\pi}{3}, 1)$	$(0, 1)$	$(\frac{\pi}{3}, 2)$	$(1,-1)$
ix	$e^{\frac{x+y}{x+1}}$	$(1,2)$	$(-1, 2)$	$(1,0)$	$(0,3)$
x	$\sqrt{y^2 + \cos^2(x)}$	$(\frac{\pi}{3}, 1)$	$(\frac{\pi}{2}, 0)$	$(0,2)$	$(-1,-4)$

3. Per ciascuna delle seguenti, si calcoli la derivata $\frac{dh}{dt}(t_0)$ dove $h(t) = f(l(t))$ usando la regola di derivazione delle funzioni composte:

	$f(x, y)$	$l(t) = (l_1(t), l_2(t))$	t_0
i	$x^3 + y^3 + 1$	$(t \cos t, t \sin t)$	3
ii	e^{x+y}	$(t^3, \log(t^2 + 1))$	2
iii	$3x^2 + 3y^2$	$(\cos 2t, \sin 2t)$	100

4. Si determinino le derivate parziali di $f(x, y) = g(h(x, y))$ (usando la regola di derivazione delle funzioni composte) dove

   (a) $h(x, y) = (3x^2 + \cos(xy), y + 2x^3), \quad g(s, t) = e^s \cos t$;

   (b) $h(x, y) = (\frac{x}{y+1}, \sin y, \cos y), \quad g(r, s, t) = r^2 + s^2 + t^2$;

(c) $h(x,y) = (xy, y\cos x, x\log y, y), \quad g(r,s,t,u) = \log sr + \cos tu + s + t;$

5. Si derminino tutti i punti di $\mathbf{R}^2$ per cui almeno una delle derivate direzionali della seguente funzione è non zero:

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq y \\ x & x = y \end{cases}$$

Dimostrare che in $(0,0)$, f è continua, ha tutte le derivate direzionali ma non è differenziabile.

6. Si determini il luogo dei punti di $\mathbf{R}^2$ per cui l'angolo tra il vettore $(3,-1)$ e il gradiente della funzione $f(x,y) = x^6 y + 3$ è pari a $\pi/6$ radianti.

7. Si determinino i punti stazionari delle seguenti funzioni:

   (a) $f(x,y) = x^2 + (y-1)^3$;

   (b) $f(x,y) = xy^3 + y$;

   (c) $f(x,y,z) = (x-1)^3 + (y-2)^2 + \cos z$.

8. Si risolvano le seguenti equazioni differenziali usando il metodo (se possibile) dei differenziali esatti

   (a) $\left(3x^2 e^{x^3+y^2} + y^2\right) dx + \left(2ye^{x^3+y^2} + 2xy\right) dy = 0;$

   (b) $\left(1 + 2xe^{x^2+y}\right) dx + \left(e^{x^2+y} - \sin y\right) dy = 0$

   (c) $\left(y + \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+y^3+1}}\right) dx + \left(x + \frac{3y^2}{2\sqrt{x^3+y^3+1}}\right) dy = 0$

   (d) $\left(3x^2 + \frac{2x}{x^2+y^2}\right) dx + \left(\frac{2y}{x^2+y^2} + \frac{1}{1+y^2}\right) dy = 0$

9. Si calcoli la matrice Hessiana in un generico punto delle seguenti funzioni:

   (a) $f(x,y) = x^3 y + \cos(y^2 + x)$;

   (b) $f(x,y,z) = \|(x,y,z)\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$;

   (c) $f(x,y,z) = \log(x^2 + y^2 + 1)$;

   (d) $f(x,y) = \arctan(x^2 + 2y + 1)$;

   (e) $f(x,y) = e^{\frac{x+y}{x-y}}$.