ESERCIZI SULLE FUNZIONI IMPLICITE, INVERSE E FORMULA DI TAYLOR.

1. Per ciascuna delle seguenti funzioni, si determini il polinomio di Taylor di grado k intorno al punto $\underline{x}_0$ utilizzando il polinomio di Taylor di una funzione di una variabile reale opportuna. Si verifichi anche che il resto $R_k((\underline{x}-\underline{x}_0)) = O(\|\underline{x}-\underline{x}_0\|^{k+1})$.

	$f(\underline{x})$	$\underline{x}_0$	k
i	$\sqrt{1+x_1^3 x_2}$	$(0,0)$	11
ii	$\arctan(x_1 x_2 x_3^2)$	$(0,0,0)$	13
iii	$\sqrt{1+x_1 x_2}\,\ln(1+\sqrt{xy})$	$(0,0)$	8
iv	$(x_1^3+x_2^2)\sin(x_1^2 x_2)$	$(0,0)$	10
v	$e^{x^2}\cos y^4$	$(0,0)$	10

2. Per ciascuna delle seguenti funzioni, si determini
   (a) la matrice Jacobiana nel generico punto $\underline{x}$;
   (b) Il luogo dei punti in cui non è possibile applicare il teorema della funzione inversa;
   (c) Il differenziale e lo spazio affine tangente a f^{-1} nel punto $\underline{x}_0$.
   (d) verificare anche che $J(f)^{-1}_{\underline{x}_0} = J(f^{-1})_{f(\underline{x}_0)}$.

	$f(\underline{x})$	$\underline{x}_0$
i	$\underline{f}(x,y) = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2+y} \\ \cos xy + x + 3y \end{pmatrix}$	$(0,0)$
ii	$\underline{f}(x,y) = \begin{pmatrix} 2x + y^2 e^{xy} \\ \ln(1+xy) \end{pmatrix}$	$(0,1)$
iii	$\underline{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} e^{x+y+z} \\ 2y^2 + x + \cos(z\pi) \\ \ln(1+xz) \end{pmatrix}$	$(1,1,0)$
iv	$\underline{f}(x,y,z,t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ x^3+y \\ y^2+tz \\ z+\ln x \end{pmatrix}$	$(1,1,1,1)$

3. Per ciascuna delle seguenti funzioni di una variabile reale $y = g(x)$, definite in modo implicito da $f(x,y) = 0$, dopo aver verficato che è possibile applicare il Teorema della funzione implicita, si calcoli
   (a) la derivata nel punto x_0;

(b) l'equazione della retta tangente nel punto $(x_0, g(x_0))$;

(c) il polinomio di Taylor di grado due intorno al punto x_0.

	$f(x,y)$	$(x_0, g(x_0))$
i	$x^4 + y^4 - 17$	(2,1)
ii	$\arctan(x^3 + y - 7) + xy^3 + 2$	(2,−1)
iii	$\ln(1 + \cosh(yx^2 + 1)) + y^3 - \ln(2x) + 1$	(1,−1)
iv	$\sqrt{x^2 + y^3} - \sqrt{5}e^{xy-2}$	(2,1)

4. Per ciascuna delle seguenti funzioni di due variabili reali $z = g(x,y)$ definite in modo implicito da $f(z,y,z) = 0$, si calcoli (se esiste) nel punto (x_0, y_0):

   (a) Il gradiente $\nabla g(x_0, y_0)$;

   (b) Il differenziale $dg_{(x_0,y_0)}$;

   (c) La derivata direzionale $\frac{\partial g}{\partial(v_1,v_2)}$ nel generico punto (x,y);

   (d) L'equazione del piano tangente alla superficie $z = f(x,y)$ nel punto $(x_0, y_0, g(x_0, y_0))$.

	$f(x,y,z)$	$(x_0, y_0, g(x_0, y_0))$	(v_1, v_2)
i	$x^4 + y^4 + z^4 - 16$	(0,0,2)	(1, 1)
ii	$x^2 \cos z + e^{yz}$	(1,0,1)	(1, 2)
iii	$\ln(1 + x^2 z^3 \arctan y)$	(2,0,1)	(−1, 1)
iv	$\cosh(x^3 - z^2 + y)$	(1,0,−1)	(−1, −1)

5. Per ciascuna delle seguenti funzioni da $\mathbf{R}^3$ a $\mathbf{R}^2$, si verifichi se si può applicare il Teorema della funzione implicita nel punto $(x_0, \underline{y}_0)$ e si calcoli la matrice Jacobiana e l'equazione dello spazio affine tangente nel punto x_0 della funzione $\underline{g}(x)$ definita implicitamente da $\underline{y}_0 = \underline{g}(x_0)$ e $F(x, \underline{g}(x)) = \underline{0}$.

   (a) $f(x, y_1, y_2) = (xy_1^2 + y_2^3, y_2^2 + x)$ $\quad (x_0, \underline{y}_0) = (1, 2, 2)$

   (b) $f(x, y_1, y_2) = (\ln(x + y_1), y_1 \ln(x + y_2))$ $\quad (x_0, \underline{y}_0) = (1, 1, 1)$

   (c) $f(x, y_1, y_2) = (\cos xy_1 + y_2, \sin(xy_2) + y_1)$ $\quad (x_0, \underline{y}_0) = (1, 0, \pi)$

   (d) $f(x, y_1, y_3) = (\sqrt{x + y_1}, y_1 y_2 + x^2)$ $\quad (x_0, \underline{y}_0) = (1, 1, 1)$