**Geometria Superiore (I modulo) — GE7**
**Esame di Metà semestre, Giovedì 9 Nov 2000**
**Rappresentazioni e Caratteri di gruppi finiti**

1. Scrivere la tavola dei caratteri irriducibili del gruppo dei quaternioni:
$$\mathbf{H} = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}.$$
2. Una rappresentazione $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ si dice *rappresentazione permutazione* se esiste una base $\mathcal{B}$ di $V$ tale che per ogni $g \in G$ e per ogni $\underline{e} \in \mathcal{B}$, $\rho_g(\underline{e}) \in \mathcal{B}$.
   i. Mostrare che se $\rho$ è una rappresentazione permutazione, allora il suo carattere è
   $$\chi_\rho(g) = \#\{\underline{e} \in \mathcal{B} \mid g\underline{e} = \underline{e}\}.$$
   ii. Mostrare che ogni rappresentazione permutazione ammette la rappresentazione banale come sotto–rappresentazione.
   iii. Mostrare che la molteplicità della rappresentazione banale come sotto–rappresentazione di $\rho$ è pari al numero di orbite dell'azione di $G$ sulla base $\mathcal{B}$.
3. Siano $\chi_1$ e $\chi_2$ i due caratteri irriducibili di $S_4$ di dimensione 3. Sia $\chi_3 = \chi_1 \otimes \chi_2$ il prodotto tensoriale (come carattere di $S_4$). Scrivere $\chi_3$ come somma di caratteri irriducibili.
4. Sia $G$ il gruppo meta–abeliano così presentato:
$$G = \langle a, b | a^5 = b^4 = 1, b^{-1}ab = a^2\rangle.$$
   Calcolare la tavola dei caratteri irriducibili di $G$. *sugg: cercare i caratteri 1–dimensionali tra quelli di $\langle b\rangle$. Dimostrare che ci sono solo* 5 *classi di coniugazione*
5. Calcolare la tavola dei caratteri di $S_3 \times S_3$.
6. Sia $G$ un gruppo e $N$ un suo sottogruppo normale. Se $V = \langle N\rangle_{\mathbf{C}}$ è lo spazio vettoriale libero generato da $N$ allora possiamo considerare la rappresentazione: $\rho : G \to \mathrm{GL}(V), g \mapsto \rho_G$ con
$$\rho_g(\sum_{n\in N} \alpha_n \cdot n) = \sum_{n\in N} \alpha_n \cdot g^{-1}ng.$$
   i. Mostrare che $\rho$ è una rappresentazione.
   ii. Calcolare il carattere $\chi$ di $\rho$ nel caso in cui
   $$G = S_4 \quad \text{e} \quad N = \{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}.$$
   iii. Scrivere $\chi$ come somma di caratteri irriducibili.
7. Sia $\rho$ la rappresentazione standard di $S_n$. Calcolare la rappresentazione determinantale di $\rho$.
8. Sia $G = \mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_5)$:
   i. Quanti sono gli elementi e i caratteri irriducibili di $G$?
   ii. Descrivere tutti i caratteri 1-dimensionali.
9. Mostrare che se $G$ è un gruppo che ha un unico carattere 1–dimensionale e $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ è una qualsiasi rappresentazione, allora $\rho_g \in \mathrm{SL}(V)$ per ogni $g \in G$.
10. Calcolare le tavole dei caratteri irriducibili di $S_5$ e $A_5$.
11. Mostrare che i caratteri di $S_n$ sono sempre reali. È vero anche per $A_n$?

**Regole.** Ogni esercizio vale 10 punti. Tempo concesso 120 minuti. Seconda consegna ore 00:00 - 10.11.00 (nella buca delle lettere di F. Pappalardi). Per la seconda consegna ogni esercizio vale 5 punti. È vietato consultare libri e appunti. È vietato comunicare con altri studenti. Ogni esercizio deve essere svolto su una e una sola facciata di un foglio.