

COGNOME ..... NOME ..... MATRICOLA .....

Risolvere il massimo numero di esercizi accompagnando le risposte con spiegazioni chiare ed essenziali. *Inserire le risposte negli spazi predisposti. NON SI ACCETTANO RISPOSTE SCRITTE SU ALTRI FOGLI. Scrivere il proprio nome anche nell'ultima pagina.* 1 Esercizio = 3 punti. Tempo previsto: 2 ore. Nessuna domanda durante la prima ora e durante gli ultimi 20 minuti.

1. Data un'estensione  $E/F$ , si dica cosa significa che  $\alpha \in E$  è algebrico su  $F$  e cosa è il polinomio minimo di  $\alpha$  su  $F$  dimostrando che è irriducibile.

2. Descrivere gli elementi del gruppo di Galois del polinomio  $(x^2 - 2)(x^2 + 3)$  determinando anche tutti i sottocampi del campo di spezzamento.

3. Dopo aver verificato che è algebrico, calcolare il polinomio minimo di  $\cos \pi/12$  su  $\mathbf{Q}$ .

4. Quanti elementi ha il campo di spezzamento di  $(x^2 + x + 1)(x^3 + x^2 + 1)$  su  $\mathbf{F}_2$ ?

5. Dimostrare che se  $p$  è primo,  $\cos 2\pi/p^2$  soddisfa un polinomio di grado  $p(p-1)/2$  su  $\mathbf{Q}$ .

6. Mostrare che un'estensione di campi è finita se e solo se è algebrica e finitamente generata spiegando le nozioni di cui si parla.

7. Descrivere gli elementi del gruppo di Galois del campo di spezzamento di  $x^n - 1$ .

8. Si enunci nella completa generalità il Teorema di corrispondenza di Galois.

9. Calcolare la dimensione su  $\mathbf{Q}$  del campo di spezzamento del seguente polinomio  $x^3 + x + 10$ .

10. Dare un esempio di polinomio non separabile, un esempio di estensione algebrica normale e non separabile e di una separabile e non normale.

