

COGNOME ..... NOME ..... MATRICOLA .....

Risolvere il massimo numero di esercizi accompagnando le risposte con spiegazioni chiare ed essenziali. *Inserire le risposte negli spazi predisposti. NON SI ACCETTANO RISPOSTE SCRITTE SU ALTRI FOGLI. Scrivere il proprio nome anche nell'ultima pagina.* 1 Esercizio = 3 punti. Tempo previsto: 2 ore. Nessuna domanda durante la prima ora e durante gli ultimi 20 minuti.

1. Dopo aver dato la definizione di sottogruppo transitivo di  $S_n$ , si elenchino i sottogruppi transitivi di  $S_4$  descrivendone gli elementi come permutazioni.

2. Descrivere gli elementi del gruppo di Galois del polinomio  $x^5 - 2$  mostrando che ha 20 elementi.

3. Dimostrare che il gruppo di Galois de polinomio (che si può assumere irriducibile)  $x^5 + x^4 + x^3 + 2x^2 + 3x + 4$  non ha 20 elementi né 10 mostrando che contiene un 3 ciclo. *(Pensare al numero primo 2)*

4. Calcolare quanti sono i polinomi irriducibili (monici) di grado 8 su  $\mathbf{F}_2$ .

5. Calcolare il gruppo di Galois del polinomio  $x^4 + 8x + 12$  (assumendo che è irriducibile).

6. Calcolare una formula per il discriminante di  $x^4 + ax + b$ .

7. Spiegare come si fa a costruire un polinomio il cui gruppo di Galois ha 13 elementi.

*Pensare al numero primo 53.*

8. Si enunci nella completa generalità il Teorema di corrispondenza di Galois.

9. Definire il discriminante di un polinomio  $\mathbf{F}[x]$  e dimostrare che è un elemento di  $\mathbf{F}$ .

10. Quali sono le radici di  $x^{16} + x^{12} + 1$  in  $\mathbf{F}_2[\alpha]$ , con  $\alpha^4 = \alpha + 1$ ?

*Provare con  $\alpha^3 + 1$ .*

